

Utformning av laboration inom Fourieranalys vid Vetenskapens Hus

Musikens matematik - En matematisk förståelse av
ljud och musikinstrument

Design of laboratory exercise in Fourier analysis at Vetenskapens Hus

Music mathematics - A mathematical understanding of sound and musical instruments

Johan Thorssell

Examensarbete på programmet *Civilingenjör och lärare* inom
området Teknik och lärande

Stockholm 2013



Utformning av laboration inom Fourieranalys vid Vetenskapens Hus
Musikens Matematik - En matematisk förståelse av ljud och musikinstrument

Design of laboratory exercise in Fourier analysis at Vetenskapens Hus
Music mathematics - A mathematical understanding of sound and musical instruments

Av Johan Thorssell

SA210X, examensarbete (30 hp) inom programmet
Civilingenjör och Lärare (300 hp) inriktning Matematik och Fysik
Höstterminen 2013

Institutionen för Matematik vid Kungliga Tekniska Högskolan
Examinator: Lars Filipsson

Institutionen för Matematik vid Kungliga Tekniska Högskolan
Huvudhandledare: Hans Thunberg

Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas
didaktik vid Stockholms universitet
Biträdande handledare: Jakob Gyllenpalm

Vetenskapens Hus, Stockholm
Extern handledare: Elin Ottergren

Royal Institute of Technology

Master of Science in Engineering and of Education

Master thesis

Abstract

This report documents the process of designing a laboratory exercise in Fourier analysis at Vetenskapens Hus (House of Science) in Stockholm. The lab is designed for high school students studying science or technical education. It focuses on the physical understanding and mathematical description of sound, in particular music. A model of such a lab is presented in this work; containing a review of the mathematical theory, summary of educational research in the field, descriptions of the design process and of the investigative work that led to the final result. The designed material for the lab includes developed computer programs, visit leader tutorial and description for teachers.

Keywords: laboratory exercise, science education, Fourier analysis

Förord

Jag har genom det här examensarbetet fått möjlighet att kombinera några av mina främsta intressen; musik, matematik och undervisning. Min egen nyfikenhet kring dessa ämnen har varit en gynnsam drivkraft under hela arbetets gång, i synnerhet när svårigheter och problem uppstått.

Mycket av den kunskap jag inhämtat under min egen studietid kom väl till användning i utförandet av detta projekt. Jag har under arbetets process fått tillfälle att kunskapsmässigt bredda mig kvantitativt och fördjupat mig kvalitativt inom ämnen jag brinner för, det ser jag som ett givande avslut på min utbildning.

Jag vill rikta min tacksamhet till Elin Ottergren som handledare vid Vetenskapens Hus. Din stadiga handledning på plats har varit en stor tillgång och gjort projektet möjligt.

Stort tack till Hans Thunberg som tidigt uppskattade idén till detta projekt. Din roll som granskare och vägledare genom arbetsprocessen har sannerligen förhöjt kvaliteten på arbetet.

Likaså tack till Jakob Gyllenpalm som hjälpt till med relevant litteratur samt att specificera och nyansera mina egna tankegångar samt givit mig värdefulla tips kring rapportskrivning.

Jag skulle även vilja tacka verksamheten och de anställda på Vetenskapens Hus. De har tagit emot mig med öppna armar, och vänligt välkomnat både mig och detta projekt.

Innehållsförteckning

Abstract	3
Förord	4
Innehållsförteckning	5
1. Inledning.....	7
1.1. Bakgrund	7
1.1.1. Vetenskapens Hus	7
1.1.2. Laborationer	8
1.1.3. Matematik och musik	8
1.2. Projektets målsättning och syfte	9
1.2.1. Laborationens syfte	10
1.3. Metodval	10
1.4. Målgrupp	11
1.5. Avgränsning.....	11
2. Teoretisk bakgrund.....	12
2.1. Laborativ matematikundervisning	12
2.1.1. Sociokulturellt perspektiv på lärande med laborationer	12
2.1.2. Relation till ämnesplaner	13
2.1.3. Lärande genom laborativt arbete	14
2.1.4. Lärares mål med laborativt arbete	19
2.1.5. Elevers uppfattning av laborativt arbete	19
2.1.6. IKT inom matematikundervisning	20
2.2. Undersökningsmetoder	20
2.3. Matematik	21
2.3.1. Svängningar, periodicitet och Fourierserier	23
2.3.2. Superpositionsprincipen	24
2.3.3. Vågekvationen	26
2.3.3.1. Lösning av vågekvation med svängande sträng	28
2.4. Generera ljud med ljudsyntes	31
3. Metod och utförande	33
3.1. Roller på Vetenskapens Hus	33
3.2. Förstudie	33
3.3. Utformning av laboration	33

3.3.1.	IKT-verktyg.....	34
3.3.1.1.	Ljudanalyseringsprogram	35
3.3.1.2.	GeoGebra	36
3.3.1.3.	Pure Data.....	37
3.3.2.	Framställning av en beskrivning av laborationen för lärare.....	38
3.3.3.	Framställning av besöksledarhandledning	38
3.4.	Utvärdering.....	39
3.4.1.	Test med besöksledare	39
3.4.2.	Test med elevgrupper	40
3.4.3.	Utvärdering av laboration, från lärare och elever	40
3.4.4.	Utvärdering av besöksledarhandledning	40
3.5.	Vidareutveckling	41
4.	Resultat.....	42
4.1.	Utvärdering av befintlig laboration	42
4.2.	Utvecklat material.....	42
4.3.	Utvärdering av besöksledarhandledning	43
4.4.	Test av laboration	44
4.5.	Den slutgiltiga laborationen.....	44
5.	Diskussion	45
5.1.	Laborationen.....	45
5.1.1.	Laborationsmaterial.....	46
5.2.	Relation till ämnesplaner	47
5.3.	Slutsats.....	47
5.4.	Fortsatta studier	47
6.	Referenser.....	49
6.1.	Referenser på Internet.....	50
7.	Bilagor	51
7.1.	Bilder från laborationen.....	51
7.2.	Beskrivning till lärare	53
7.3.	Besöksledarhandledning.....	55
7.4.	Utvärdering av laboration.....	67

1. Inledning

1.1. Bakgrund

Denna rapport är en dokumentation av ett examensarbete på programmet Civilingenjör och Lärare 300 högskolepoäng (hp) på KTH. Denna utbildning är ett samarbete mellan KTH och Stockholms universitet, utbildningen leder fram till både en civilingenjörsexamen och en ämneslärarexamen med inriktning mot gymnasieskolan.Handledare från båda lärosätena är således delaktiga i handledningen av detta arbete. Examensarbetet har en omfattning av 30 hp vilket motsvarar omkring 20 veckors heltidsarbete. I det ligger bestämmelsen att en del av arbetet ska utföras som *verksamhetsförlagd utbildning* (VFU).¹ Detta betyder att den delen av arbetet utförs i en verksamhet eller företag utanför universitetsmiljö, i detta fall på Vetenskapens Hus i Stockholm.

Projektet har bestått av att utveckla en matematiklaboration för gymnasieelever. Laborationen har utvecklats vid och för Vetenskapens Hus med en tidsplan som sträckt sig över höstterminen 2013. Ämnesområdet för laborationen fastställdes till att innefatta introduktion till en matematisk förståelse av musikinstrument, där den bakomliggande matematiska teorin är Fourieranalys. Detta val gjordes dels för att det fanns ett behov av nya matematiklaborationer, dels för att förbättra och vidareutveckla en befintlig laboration i fysik, och dels för att laborationen som sådan skulle få elever att möta intresseväckande matematik ur en annan synvinkel än den som de möter i skolan.

1.1.1. Vetenskapens Hus

Vetenskapens Hus är ett Science Center i Stockholm som drivs i ett samarbete mellan KTH och Stockholms universitet. De organiserar en verksamhet där *grundskole- och gymnasieelever kan göra experiment med modern forskarutrustning*.² Skolelever kan besöka Vetenskapens Hus för att i en forskarnära miljö möta och laborera med utrustning som kanske inte finns tillgänglig i skolan. Vetenskapens Hus har ett fåtal laborationer inom matematik och målsättningen med detta arbete är att utveckla en sådan matematiklaboration som passar verksamheten.

Vetenskapens Hus bedriver även bland annat handledning för gymnasiearbeten, lärarfortbildningar och barnkurser.

¹ URL: <http://www.kth.se/student/program/examensarbete/examensarbete-sci?programme=cl> (hämtad 2013-11-13).

² URL: <http://www.vetenskapenshus.se> (hämtad 2013-11-13).

1.1.2. Laborationer

Den centrala delen i Vetenskapens Hus verksamhet är att tillhandahålla laborationer inom teknik, naturvetenskap och matematik. Dessa laborationer handleds av studenter från Stockholms universitet och KTH.³

Laborationer, och framförallt laborationer i matematik kommer i detta arbete definieras på ett liknande sätt som författarna Rystedt och Trygg⁴ gör i sin kunskapsöversikt över laborativ matematikundervisning, där beskrivs det

”som en verksamhet där elever inte enbart deltar mentalt utan också arbetar praktiskt med material i undersökningar och aktiviteter som har ett speciellt undervisningssyfte.”

(Rystedt & Trygg, 2010, s. 5)

Skolverket hänvisar också till denna definition av laborativ verksamhet inom matematik i sin publikation *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*.⁵ Dessutom poängterar Skolverket även att eleverna genom laborativ matematikundervisning ska få upptäcka och skapa matematik, och inte alltid få den presenterad i färdig form.⁶ Laborationer kan ses som en möjlighet för elever att i ett undersökande arbete uppleva och ta till sig ny matematisk kunskap.

1.1.3. Matematik och musik

Relationen mellan musik och matematik har länge fascinerat människan. Många matematiker har fångats av musik och musikinstrument, de har med utgångspunkt från musiken upptäckt och formulerat intressanta framstående matematiska insikter.

Redan hos antikens matematiker fanns intresset att förstå musikinstrument (ca 500 år före vår tideräkning). Upptäckten att harmoni mellan toner kunde beskrivas med enkla talförhållanden var något som fascinerade Pythagoras. Denna fascination var så stor att Pythagoras och hans anhängare hade idén om att planeters banor kunde beskrivas med harmoniska förhållanden. Tal var enligt Pythagoréerna *”substanten av allting”*, särskilt de positiva heltalen ansågs vara grundläggande för universums uppbyggnad.⁷ Rörelser och positioner hos stjärnor och planeter beskrevs med tal och geometriska former. Musikens intervall, i synnerhet de som ansågs vällydande, kunde beskrivas med enkla talförhållanden. Då två strängar anslås med längdförhållandet 2:1 hörs det melodiska intervall som inom musiken benämns oktav, förhållandet 3:2 ger det musikaliska intervallet kvint och förhållandet 4:3 ger intervallet kvart.⁸ De intervall som inte anses speciellt vällydande bildas av mer komplexa talförhållanden. Dessa musika-

³ URL: <http://www.vetenskapenshus.se> (hämtad 2013-11-13).

⁴ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s. 5.

⁵ Skolverket (2011), *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*. Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2724> (hämtad 2013-10-13), s. 26.

⁶ Ibid, s. 27.

⁷ Katz, Victor J. (2009). *A history of mathematics. An introduction*, 3rd edition, Addison-Wesley, s. 37

⁸ Ibid. s. 37

liska intervall, i synnerhet de välljudande, är grundläggande för musikens uppbyggnad och utifrån dem kan en hel musikalisk skala skapas.

På 1700-talet gav studiet av vågekvationen för en svängande sträng upphov till metoder för lösningar av partiella differentialekvationer (mer om detta i teoriavsnittet, se 2.3 Matematik) och en ökad förståelse för rörelsen hos strängen. Brook Taylor, Leonard Euler, Jean LeRond d'Alembert, John Bernoulli och Daniel Bernoulli är några framstående matematiker som studerat musikinstrument och vågekvationen och dess lösningsmetoder.⁹ Jean Baptiste Fourier (född år 1768) var den matematiker som slutligen samlade samman och kunde knyta ihop de matematiska verktyg för att sammanställa teorin som bland annat beskriver musikaliska toner.

Idag kan ljud och musik spelas in, sparas och åter spelas upp. Genom tekniska redskap kan analys och manipulation av ljud utföras. Inom dagens musikskapande används datorer och tekniska hjälpmedel i allt större utsträckning. Kunskapen om hur ljud kan manipuleras och analyseras blir därmed viktigare. Den digitala framställningen av ljud (ljudsyntes) ger en ny intressant och betydelsefull förbindelse mellan matematik och musik.

1.2. Projektets målsättning och syfte

Målet har i detta projekt varit att under höstterminen 2013 utforma en matematiklaboration för gymnasieelever på Vetenskapens Hus i Stockholm. Tyngdpunkten i projektet har varit på utformningen av den nya laborationen. Projektets syfte är tredelat och består av:

- att hjälpa elever lära sig ett visst innehåll
- att hjälpa besöksledare uppnå ovanstående
- att hjälpa lärare relatera laborationens innehåll till sin undervisning

I ett projekt som detta behövs en plan för hur mål ska uppnås samt underlag till att syftena tillgodoses. För att precisera och konkretisera projektets syften formulerades åtta stycken frågeställningar som har genomfört projektet.

- Hur kan en laboration om Fourieranalys utformas?
- Hur kan matematiken som beskriver ljud och musik presenteras i detta sammanhang?
- Vilket urval/avgränsning behöver göras i det matematiska stoffet?
- Hur anpassas kunskapsnivån till målgrupp?
- Hur möjliggörs lärandet i en laboration ur didaktisk synvinkel?
- Vilken koppling kan göras till ämnesplaner i matematik på gymnasiet?
- Hur sammanställs en tydlig och pedagogisk besöksledarhandledning?

För att kunna uppfylla syftena och frågeställningarna ingår som en del i projektet uppgiften att utveckla ett utbildningsunderlag, en besöksledarhandledning samt lämplig programvara utifrån didaktiska och pedagogiska hänsynstaganden. Med laboration avses det utbildningstillfälle då elever besöker Vetenskapens Hus och genomför en laborativ verksamhet. Med termen

⁹ Sparr, Gunnar & Sparr, Annika (1999). *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur, s. 394

utbildningsunderlag menas det material som framställts och används för att utföra själva laborationen. Besöksledarhandledning är den anvisning som är avsedd för besöksledare i deras förberedande arbete. I besöksledarhandledningen beskrivs besöket, dess syfte, bakomliggande teori och förslag på genomförande.

Frågeställningarna har fungerat som betydelsefulla delmålsättningar att uppfylla och arbeta mot, och har givit en möjlighet att under projektets gång kunna stämma av och försäkra att projektet utvecklar sig som det ska. Utöver utvecklingsdelen av laborationen finns den utforskande delen i arbetet. Utforskningsdelen har som syfte att vidareutveckla och förbättra laborationen. Denna del består av att utvärdera det insamlade resultatet av vad elever, lärare och besöksledare har för uppfattning om laborationen och utifrån det vidareutveckla laborationen samt dess material.

Laborationen planerades vara färdigställd i slutet av december 2013 och målsättningen var att den då skulle kunna fasas in och användas som en färdigställd matematiklaboration i Vetenskapens Hus verksamhet under vårterminen 2014.

1.2.1. Laborationens syfte

Laborationen är avgränsad till gymnasiet och har matematisk modellering inom musik som huvudinnehåll. Själva laborationen har som övergripande syfte att få eleven att förstå grunderna i och användningsområdena för enkel Fourieranalys. Laborationen är tänkt att ge eleven möjlighet att matematiskt analysera ljud från musikinstrument samt att lära sig utföra en enkel syntes av ett musikinstrument genom passande programvara på en dator. Målsättningen för laborationen är att ge eleverna ett nytt och intressant perspektiv på matematiken (matematik i musik), fördjupa kunskaper inom det matematiska ämnesområdet (enkel Fourieranalys på gymnasiet och öka kunskapen om matematisk modellering) och samtidigt knyta den matematiska förståelsen till något intressant och vardagligt.

Framställningen av det matematiska innehållet i själva laborationen utförs i betydande grad genom grafer på en dator och har som mål att betona kunskaper om vågor, amplituder, frekvenser, periodicitet, övertoner och Fourierserier.

1.3. Metodval

För att kunna uppnå de uppsatta målsättningarna behövs arbetsmetoder. Nedan beskrivs de olika metodval som ligger till grund för arbetsprocessen. Projektet kan delas upp i två olika faser som i viss mån har löpt jämsides under projektets gång. Dessa två är:

- Utformningsfasen
- Utforskningsfasen

Utformningsfasen omfattar produktion och utveckling av en fungerande laboration som kan tas i bruk på Vetenskapens Hus, detta är huvuddelen med projektet. Utforskningsfasen består

av utvärderingar och kommer att användas för att förbättra och vidareutveckla materialet för laborationen.

De metoder som använts i genomförandet av projektet kan sammanfattas i fem olika punkter:

- Litteraturstudier inom de ämnen som berör examensarbetet (matematik, fysik och musikaliska syntesmetoder samt pedagogik och didaktik).
- Utveckling av laborationsmaterial, bland annat programmering av IKT (Information- och kommunikationsteknik).
- Undersökning genom auskultation, intervjuer och enkäter vid elevbesök, av lärare, elever och personal på Vetenskapens Hus.
- Utvärdering av undersökningsresultatet.
- Vidareutveckling av laborationen utifrån resultat från testad laboration, intervjuer och enkät.

De första två punkterna tillhör huvudsakligen utformningsfasen i och de sista tre punkterna ingår i den utforskande fasen i arbetet.

1.4. Målgrupp

Matematiken i laborationen är av tämligen avancerad karaktär. Den introduceras i vanliga fall först för studenter på högskolans matematikkurser. Målgruppen har begränsats mot gymnasiets senare år, i synnerhet inom de naturvetenskapliga och tekniska inriktningarna där eleverna är bekanta med beskrivning av vågor i både fysik och matematik. De färdigheter och förkunskaper som eleverna antas behärska för att kunna genomföra laborationen är: grundläggande kunskap om trigonometriska funktioner och dess egenskaper som amplitud, period och fas.

1.5. Avgränsning

Inom den matematiska teorin sker en avgränsning i enlighet med problemställningen och det som anses vara relevant för projektet.

Laborationsmaterialet som används i analys av ljudvågor avgränsades till de resurser som finns på Vetenskapens Hus.

2. Teoretisk bakgrund

Teoriavsnittet kommer att sammanfatta och presentera den litteratur som ligger till grund för arbetet. Valet av litteratur har grundat sig i problemformuleringarna samt projektets målsättning och syfte. Den avgränsning som gjorts har även påverkat valet av litteratur.

Teoriavsnittet presenterar dels de pedagogiska och didaktiska perspektiven på lärande med laborationer, dels den matematiska teori som ligger till grund för Fourierserier i högsta grad och dels en presentation av de syntesmetoder som använts i utvecklingen av programvara till laborationen. Med bakgrund, utgångspunkt och hänsyn till teorin har den utformade laborationen tagit form (mer om detta i avsnitt 3 Metod och utförande).

2.1. Laborativ matematikundervisning

I följande avsnitt presenteras en sammanställning av för projektet betydelsefulla teorier om lärande inom laborativ verksamhet. Definitionen av laborativ matematikundervisning, den som introduceras i inledningsavsnittet (1.1.2 Laborationer), gäller i synnerhet i detta avsnitt.¹⁰

2.1.1. Sociokulturellt perspektiv på lärande med laborationer

Enligt det sociokulturella perspektivet på lärande är länken mellan en individs inre tänkande och individens yttre interaktioner, kommunikation. Säljö beskriver att lärande eller utveckling sker i en viss ordning, först i en social miljö som därefter överförs till individens inre tankevärld.¹¹ Laborationer innehåller som oftast interaktioner med olika materiella föremål i lärandeprocessen. Det påminner i hög grad om det sociokulturella perspektivet på lärande. Linge-fjård och Mehanovicskriver att "*lärande är rotat i en social och kulturell värld*".¹² De menar att handlande och lärande är tätt sammanlänkat med olika tillgängliga verktyg. Det sociokulturella perspektivet på lärande utgår från att människan lär sig genom och i ett socialt samspel med sina medmänniskor. Samspelet eller kommunikationen sker genom verktyg och redskap, så kallade artefakter. Dessa artefakter, som möjliggör kommunikation, kan vara verkliga ting eller intellektuella hjälpmedel. Inom det sociokulturella perspektivet anses kunskaper inte finnas i objekt eller händelser, utan i individens föreställning om dem.¹³ En följd av detta blir att vårt tänkande är grundat i vilka olika artefakter vi har till förfogande när vi inhämtar ny kunskap, detta kallas *mediering*. Mediering beskriver den samverkan eller förmedling som uppstår mellan människor och de redskap som används. Ett av de viktigaste medieringsverktygen för lärande är språket.¹⁴ Säljö beskriver att språket medierar omvärlden, och gör det

¹⁰ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s. 5

¹¹ Säljö, Roger (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma, s. 105

¹² Jönsson, P. Linge-fjård, T. & Mehanovic, T. (2010). *Matematik och det nya medialandskapet – nationell webbplats för IKT*. Nämnaren, 1, s. 47

¹³ Säljö, Roger (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma, s. 63

¹⁴ Ibid, ss. 80-82

möjligt för människan att förstå den.¹⁵ Kommunikationen mellan människor öppnar upp ett samspel där delaktigheten gör det möjligt att beskriva omvärlden.

Mot bakgrund av det sociokulturella perspektivet på lärande kan resonemanget föras in mot att omfatta lärande genom laborationer. I en laboration kan elever få möjlighet att genom olika materiella artefakter (datorer, instrument) koppla samman kunskap om matematik (intellektuella artefakter). För undervisning betyder det att göra det möjligt för eleven att med hjälp av artefakterna forma eller mediera en handling.

2.1.2. Relation till ämnesplaner

Skolverkets ämnesplaner i matematik för gymnasieskolan består av ämnets syfte, centralt innehåll för en given matematikkurs samt de kunskapskrav som krävs för ett visst betyg.¹⁶ Följande utdrag är delar av den gymnasiegemensamma ämnesplanen i matematik.¹⁷ Utdragen är valda efter relevans och koppling mot ett laborativt arbetssätt. I beskrivningen av matematik- ämnets syfte anges att

”Undervisningen ska innehålla varierande arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer.”

samt att

”I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.”

(Skolverket, 2011, s. 90)

En laborativ verksamhet inom matematikämnet har, om den utformas och utförs på lämpligt sätt, möjlighet att uppfylla dessa syften. För eleverna resulterar en gynnsamt utförd laborativ verksamhet ett varierat arbetssätt i en miljö som skiljer sig från den vardagliga där de får möjlighet att kommunicera matematik i olika avseenden. Om laborationen utformas till att innehålla tekniska hjälpmedel, såsom en dator, uppfylls även det andra syftet som beskrivs ovan.

Vidare beskrivs i Skolverkets ämnesplaner vissa förmågor som eleverna som läser matematik ska utveckla, tre av dessa är att

¹⁵ Säljö, Roger (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma, s. 82

¹⁶ Skolverket (2011), *Ämne - Matematik*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/laroplaner-amen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv> (hämtad 2013-10-13)

¹⁷ Skolverket (2011), *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705> (hämtad 2013-10-13), s. 90

- använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
- tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
- relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen.

(Skolverket, 2011, s. 90)

Under rubriken centralt innehåll i ämnesplanen redogörs för det sakinnehåll (kunskap och strategier) som elever ska införskaffat efter fullföljd kurs. Beroende på vilken kurs som eleverna på gymnasiet läser ingår olika centralt innehåll. Det kan framhållas att vissa formuleringar i de centrala innehållen finns beskrivna för samtliga matematikkurser på gymnasiet. Från ämnesplanerna för gymnasiets matematikkurser kan följande redovisning av kunskapsinnehållet hittas¹⁸

”Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.” (nämns i kurs 1a-c, 2a-c, 3b, 3c, 4, 5)

”Matematiska problem av betydelse för [...] samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.” (nämns i kurs 1a-c, 2a-c, 3b, 3c, 4)

”Egenskaper hos trigonometriska funktioner” (nämns i kurs 4)

2.1.3. Lärande genom laborativt arbete

Genomgången av artiklar och forskningsresultat som presenteras i följande avsnitt har gjorts med utgångspunkt i att hitta metoder och verktyg som kan verka för att öka lärandet hos elever genom laborativt arbete.

Vid Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) i Göteborg har Elisabeth Rystedt och Lena Trygg utfört en översiktsstudie med titel *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*.¹⁹ De har genom sin studie av tidigare forskning funnit många fördelar med laborativt arbetssätt inom matematikundervisningen. Några av de effekter med laborativ verksamhet i matematik som de framhäver är:

- ett ökat intresse för matematiken, vilket kan gynna lärandeprocessen
- att för eleverna skapa gemensamma referenser
- att kunna hantera olika representationer av samma matematiska förhållanden
- varierande sätt för läraren att analysera och bedöma elevers kunskande

(Rystedt & Trygg, 2010, ss.57-58)

¹⁸ Skolverket (2011), *Ämne - Matematik*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv> (hämtad 2013-10-13)

¹⁹ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet

Laborativ verksamhet inom matematik kan alltså ge eleverna en inspirerande introduktion och förhoppningsvis ett ökat intresse för ämnet. Genom att skapa gemensamma referenser kan tydliga bilder befästas i minnet, dessa bilder kan lärare och elever senare i undervisningen gå tillbaka och referera till. Genom att möta matematiken ur olika synvinklar ökas begreppsutvecklingen mellan det konkreta och abstrakta. Lärarens arbete med att bedöma elever kan underlättas genom laborativt arbete då elever får möjlighet att visa på laborativa färdigheter.

I kunskapsöversikten kommer författarna även fram till att lärarens roll är avgörande för elevers lärande vid laborativ verksamhet. Författarna framhåller då Gunnar Nilssons slutsatser om laborationer där lärarens roll är central.²⁰ Nilsson har ställt upp vissa grundläggande förutsättningar som läraren behöver uppfylla för att gynna en förståelse hos eleverna. Det som läraren behöver göra är bland annat

- att organisera och leda arbetet
- att tydliggöra syftet med laborationen för eleverna
- att peka på kritiska punkter och ställa utvecklande frågor
- att tillsammans med eleverna pröva olika lösningar
- att möjliggöra diskussioner mellan eleverna

(Rystedt & Trygg, 2010, s. 35)

Dessa aspekter klargör och upplyser om hur och på vilket sätt lärarens eller ledarens roll kan påverka laborationen till det bättre. Om läraren tar hänsyn till dessa förutsättningar kan ett bra lärandeklimat skapas.

Ytterligare en aspekt på lärande inom laborativ verksamhet är frågan om innehållet som eleverna ska lära sig. Även detta beskriver Rystedt och Trygg. De presenterar tre grundläggande didaktiska frågor som läraren bör ställa sig inför en laborativ verksamhet. Dessa frågor är:

- *Vad ska läras?* – Matematikinnehåll
- *Varför ska det läras?* – Mål och syfte
- *Hur ska eleverna få möjlighet att lära?* – Metod och genomförande av aktiviteten

(Rystedt & Trygg, 2010, s. 63)

Författarna menar att om detta förmedlas till eleverna på lämpligt sätt kan risken för att eleverna bara ska *göra* något istället för att *förstå* något minimeras.²¹ En frågeställning som uppkommer för laborationsledaren blir således att förstå vad som menas med "*på lämpligt sätt*". Utmaningen att kunna kommunicera på lämpligt sätt är situationsberoende och det är ledarens erfarenhet av och förmåga att leda grupper samt att konstruera och genomföra laborationer som avgör resultatet. Med utgångspunkt i de tre didaktiska frågorna kan lärarens/ledarens roll

²⁰ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s.35

²¹ Ibid, s. 63

stärkas i den laborativa verksamheten, detta genom att formulera innehåll, syfte och metod med laborationen.²²

Rystedt och Trygg avslutar sin kunskapsöversikt med att kort beskriva användningen av laborationsmaterial i matematikundervisning:

”Det handlar inte om att använda laborativa material eller ej i matematikundervisningen – det beror på hur och i vilket syfte de används.”

(Rystedt & Trygg, 2010, s. 65)

Den stora utmaningen för laborationskonstruktören är inte om det ska användas laborativt material eller inte utan i vilket syfte det ska användas. Överlag visar studien på vikten av att det finns ett grundläggande syfte med alla de moment som ska utföras i en laborativ verksamhet.

En annan översiktsstudie som fokuserat på laborativ verksamhet inom naturvetenskaplig utbildning har utförts av Hofstein och Lunetta.²³ Studien betraktar laboratorieverksamhet i skolan i ljuset av samtida praxis och kunskaper. Analysen undersöker tidigare studier som utförts under de senaste 20 åren inom ramen för; tidigare studier, samtida mål för lärande i naturvetenskaplig undervisning och nuvarande modeller av hur elever konstruerar kunskap. Även information om hur lärare och elever bedriver naturvetenskaplig laboratorieverksamhet framförs. I studien framkommer bland annat att många av de aktiviteter som beskrivs för elever (i laborationsbeskrivningar) består av receptliknande förfaranden (guider) där eleverna enkelt följer en lista på vad som ska göras.²⁴ Eleverna engageras inte i laborationsprocessen och går miste om de mål som laborationen har.

I en studie utförd av Abrahams och Millar uppmärksammas att många inom den naturvetenskapliga utbildningsgemenskapen ser den laborativa verksamheten som utförs av studenter som ett väsentligt och centralt inslag i utbildningen.²⁵ Frågor har dock väckts av vissa naturvetenskapliga lärare om det praktiska arbetets effektivitet i undervisningen och som strategi för lärande. I studien utförd av Abrahams och Millar undersöktes effekten av laborativ verksamhet i undervisning genom att de analyserade ett urval av 25 "typiska" undervisningstillfällen med laborativ verksamhet i naturkunskap på gymnasieskolor i England.²⁶ Lärarnas fokus på dessa lektioner var främst att utveckla elevers kunskaper i att hantera laborationsmaterial, snarare än att utveckla förståelse för den vetenskapliga undersökningsprocessen.

²² Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s.63

²³ Hofstein, A. & Lunetta, V. N. (2004), *The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century*. Sci. Ed., 88: 28–54. doi: 10.1002/sce.10106

²⁴ Ibid, s. 47

²⁵ Abrahams, Ian & Millar, Robin (2008). *Does Practical Work Really Work?* International Journal of Science Education. Vol. 30, Iss. 14

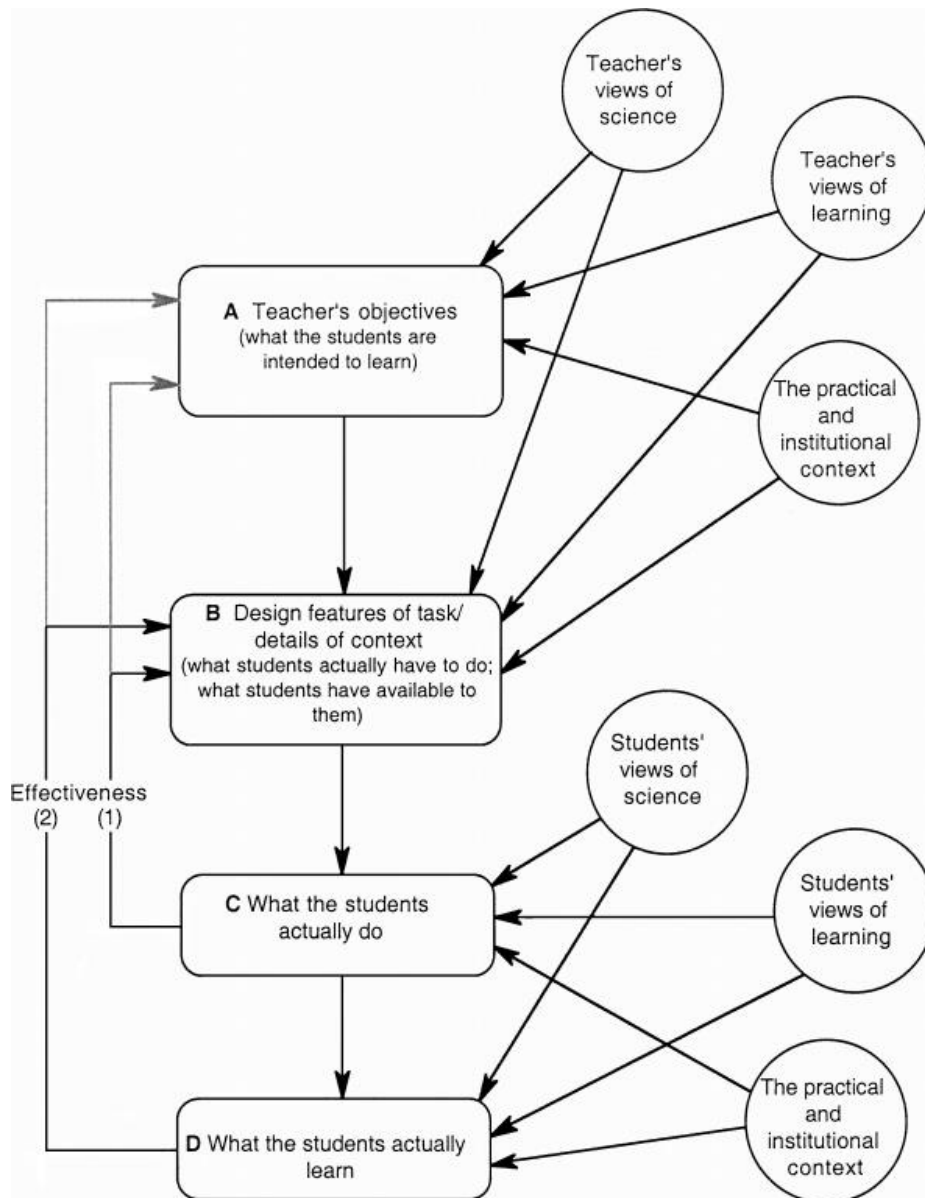
²⁶ Ibid, s. 1965

Studien visar att laborativ verksamhet i allmänt var effektivt för att få eleverna att göra vad som är avsikten med de materiella objekt som finns att tillgå i laborationen. Dock visar studien att det praktiska arbetet är mindre effektivt i att få elever att använda de avsedda vetenskapliga idéerna. Dessa idéer är avsedda för att vägleda elevers handlingar och få dem att reflektera över de uppgifter som de samlar in. Enligt studien fanns det få tecken på att lärarna i sitt arbete med att utforma praktiska aktiviteter hänvisar och betonar den kognitiva utmaningen att knyta upptäckter till idéer. Studien visar också att i praktiska uppgifter ingår sällan uttalade strategier för att hjälpa eleverna att göra sådana kopplingar. Studien visar även att lärarens syfte med laborationen inte presenteras för klassen på ett sätt som motsvarar det syfte som läraren jobbar efter.

Det analytiska ramverk som användes i studien erbjuder ett sätt att bedöma lärandet och syftet med praktiska uppgifter i undervisning.²⁷ Ramverket kan även användas som utgångspunkt i utformandet av en laboration. Detta ramverk presenterades ursprungligen som en analysmetod av laborationer inom undervisning i en artikel av Tiberghien och Millar m.fl.²⁸ Artikelnen innehåller resultat från en studie där likheter och skillnader undersökts i laborationer mellan ämnen, mellan utbildningsnivåer och mellan länder. Verktuget (ramverket) som användes för analysen består av en ”karta” (eller klassificeringssystem) för laborativa arbetsuppgifter. Resultaten från undersökningen visar att vissa skillnader noterats mellan de naturvetenskapliga ämnena och mellan utbildningsnivåer. Men det dominerande intrycket från analysen är den slående likheten i laborationsutförandet mellan utbildningsnivåer, naturvetenskapliga ämnen och länder. Klassificeringskartan presenteras nedan

²⁷ Abrahams, Ian & Millar, Robin (2008). *Does Practical Work Really Work?* International Journal of Science Education. Vol. 30, Iss. 14, s. 1947

²⁸ Tiberghien, A & Millar, R. et al. (2001), *An analysis of labwork tasks used in science teaching at upper secondary school and university levels in several European countries*. Sci. Ed., 85: 483–508. doi: 10.1002/sce.1020



Figur 1. En modell av processen för design och utvärdering av lärandeuppgift. (Tiberghien & Millar s. 488)

Modellen visar de processer som ingår i utvecklingen av en lärandeuppgift. Modellen illustrerar hur elever och lärares syn på vetenskap och lärande påverkar utfallet av en laboration. Klassificeringskartan belyser även sambandet mellan de olika nivåerna av kunskap hos läraren och eleven. Flödespilarna visar hur de olika nivåerna påverkar utvecklingen av en laboration. Den pilen benämnd "Effectiveness 1" representerar i vilken utsträckning elevens aktivitet stämmer överens med det läraren avsett med uppgiften. "Effectiveness 2" representerar i vilken utsträckning elevens aktivitet når inlärningsmålen i exempelvis ämnesplaner.²⁹

²⁹ Tiberghien, A & Millar, R. et al. (2001), *An analysis of labwork tasks used in science teaching at upper secondary school and university levels in several European countries*. Sci. Ed., 85, s. 487

Resultaten från studien visar även den potentiella nyttan av klassificeringskartan som ett verktyg för uppföljning och design av det praktiska arbetet och för att lyfta frågor om användningen av laborationer i naturvetenskaplig utbildning. Utifrån, den av studien utformade, klassificeringskartan kan en tydlig struktur för en laboration skapas. Betydelsefulla byggstenar, centrala metoder och val uppmärksammas som annars skulle kunna förbises i en utvecklingsprocess.

2.1.4. Lärares mål med laborativt arbete

Abrahams och Millar betonar i sin studie att de lärare som håller i en laboration inte framhäver sitt syfte med en laboration till eleverna.³⁰ De visar även på att lärarens syfte med laborationen inte är tydligt formulerat. Högström, Ottander och Benckert har med sin studie analyserat gymnasielärares mål med sin laborativa verksamhet.³¹ Analysen av lärarnas generella mål visade fem olika teman och att kognitiva aspekter var den mest framträdande. Det visades också att en väl utformad laborationshandledning stödjer lärarnas mål att utveckla elevers förståelse av begrepp och fenomen.

2.1.5. Elevers uppfattning av laborativt arbete

Då en laboration inom utbildning syftar till att utbilda och främja elevers kunskap blir vetenskapen om elevens uppfattningar av laborationen en av de centrala utgångspunkterna. I en studie utförd av Deacon och Hajek framförs att det finns fyra centrala faktorer som visat sig ha störst inflytande på elevers uppfattningar om värdet av laborationer.³² Dessa fyra är:

- Krav på att avsluta ett experiment inom utsatt tid.
- Den information som tillhandahålls på laborationsinstruktionen.
- Den hjälp som personal och assistenter ger under laborationen.
- Elevers beredskap inför laborationen.

Författarna diskuterar även viktiga beståndsdelar för att engagera och få elever att genomföra laborationer med gynnsamt resultat. De beskriver bland annat vikten av att laborationsledaren eller läraren regelbundet för eleverna betonar behovet av: att se över sina tidigare laborationsrapporter, ta reda på vilka laborationer som de kommer att utföra nästa gång, att noga läsa laborationsinstruktionen, att identifiera de viktigaste begrepp, metoder och syfte med laborationen samt att granska relevanta anteckningar och avsnitt i läroboken och vid behov diskutera laborationen med en klasskamrat.

³⁰ Abrahams, Ian & Millar, Robin (2008). *Does Practical Work Really Work?* International Journal of Science Education. Vol. 30, Iss. 14, s. 1965

³¹ Högström, Per, Ottander, Christina & Benckert, Sylvia (2006). *Lärares mål med laborativt arbete: Utveckla förståelse och intresse*. Nordina, s. 63

³² Deacon, Christopher & Hajek, Allyson (2011). *Student Perceptions of the Value of Physics Laboratories*. International Journal of Science Education. Vol. 33, Iss. 7, s. 960

2.1.6. IKT inom matematikundervisning

IKT är en akronym för *Information- och kommunikationsteknologi* och används som benämning på den informationsteknik som möjliggör kommunikation mellan människor. På senare år har användningen av IKT inom utbildning tilltagit. Jönsson, Lingefjärd och Mehanovic beskriver hur den interaktiva teknologin har förändrat hur elever närmar sig matematiken.³³ De menar att genom teknik kan matematiska idéer som begrepp och mönster undersökas experimentellt. Genom att använda lämpliga datorprogram kan elever använda och växla mellan olika matematiska representationer.³⁴ En ändring i någon matematisk förutsättning kan ge en omedelbar återkoppling, något som tidigare kanske behövde tidskrävande beräkningar och en speciell förmåga som att till exempel rita grafer. Tekniska verktyg kan utformas aktivt snarare än passivt och då på ett konkret sätt påverka hur vi tänker och ser samband i matematiken³⁵. Förutsättningarna för att uppleva matematiska begrepp och samband har ökat genom tekniken.

Författarna Gustafsson och Jakobsson m.fl. menar att användandet av IKT kan främja behandlingen av matematiska uttrycksformer och representationer.³⁶ Författarna anser att ämnesplanerna pekar på värdet av att arbeta med olika matematiska representationer och uttryckssätt. De menar att samtidigt som syftet med de olika representationerna uppfylls kan den digitala teknik som erbjuder detta användas.³⁷

2.2. Undersökningsmetoder

Vid det undersökande arbetet används valda insamlingsmetoder för data. De huvudsakliga metoderna för datainsamling är; observation, intervju, enkäter och frågeformulär. Observationer förekommer som deltagande observation. I deltagande observationer vistas forskaren i det fält där undersökningen sker. Där interagerar forskaren i högre eller lägre grad med undersökningspersonerna beroende på miljö och studiens fokus. Kullberg betonar vikten av att kunna distansera sig från sig själv i en deltagande observation.³⁸

³³ Jönsson, P. Lingefjärd, T. & Mehanovic, T. (2010). *Matematik och det nya medialandskapet – nationell webbplats för IKT*. Nämnaren, 1, s. 47

³⁴ Ibid, s. 47.

³⁵ Ibid, ss. 47-50.

³⁶ Gustafsson, I-M, Jakobsson, M, Nilsson, I, Zippert, M, m.fl. (2011). *Matematiska uttrycksformer och representationer*. Nämnaren 36 (3), s. 36.

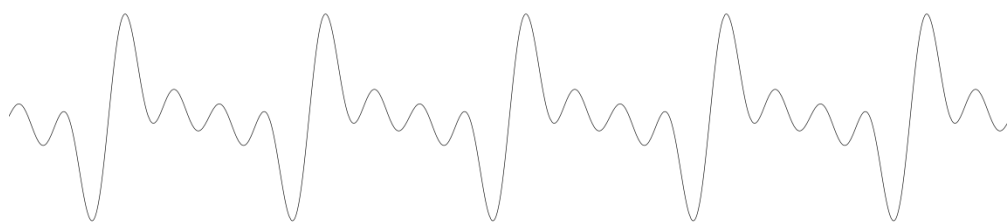
³⁷ Ibid, s. 45

³⁸ Kullberg, Birgitta (2004). *Etnografi i klassrummet* (2:a Uppl.). Lund: Studentlitteratur, s. 92

2.3. Matematik

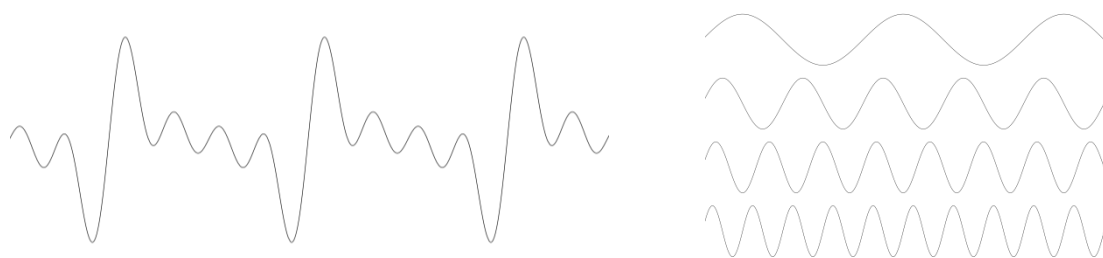
Ljud är en uppfattning av förändringar i lufttryck som öronen registrerar. Luftens vibrationer får trumhinnan att vibrera och genom detta fortplantas ljudet vidare till hörselsnäckan via små ben i innerörat. Hörselsnäckan registrerar ljudets styrka och frekvenser. Dessa signaler skickas vidare till hjärnan och vi uppfattar ljudet.³⁹ Då uppfattningen av ljudet beror av hur tryckförändringarna som når öronen uppför sig är forskning inom detta av intresse. Akustik är vetenskapen där man studerar ljud och vibrationer i luften.⁴⁰ Genom en förståelse av hur dessa vibrationer alstras och uppför sig kan modeller och beskrivningar av verkligheten framställas.

En musikalisk ton består av en periodisk svängning; förändring i lufttryck som upprepar sig efter ett visst tidsintervall. En stor del av det ljud som når våra öron är inte periodiskt, och uppfattas då som ett ljud utan en precis tonhöjd. Figur 2 visar en periodisk signal som skulle kunna representera en periodisk svängningsrörelse i luften. Den periodiska svängningen kan ha olika utseende och form, det är periodiciteten som gör den till en ton med en uppfattbar tonhöjd.



Figur 2. En periodisk svängningsrörelse kan beskrivas genom att åskådliggöra dess förflyttning från jämviktsläget.

Den musikaliska tonens rätt så komplicerade ljudsignal kan enligt teorin om Fourierserier (se avsnitt 2.3.1 för mer ingående beskrivning av Fourierserier) delas upp i enklare grundsvängningar (trigonometriska svängningar) av olika frekvens och amplitud. En periodisk signal kan alltså beskrivas som en summa av enklare svängningar (se Figur 3).⁴¹



Figur 3. Den periodiska signalen till vänster består av en sammanslagning av de fyra enkla svängningarna som ses till höger.

³⁹ Young, Hugh D. & Freedman, Roger A. (2008). *Sears And Zemansky's University Physics: With Modern Physic* (kap. 15-16). 12th edition. Addison-Wesley, s. 527

⁴⁰ URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Acoustics> (Hämtat 2013-10-29)

⁴¹ Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006, s. 14

För periodiska signaler gäller att om den lägsta frekvensen bland svängningarna har frekvensen f visar det sig att de andra svängningarnas frekvenser är heltalsmultiplar av f . Det betyder då att nästkommande svängning har frekvensen $2f$ och nästa $3f$. Själva tonhöjden på en ton uppfattar vi genom grundtonen eller grundfrekvensen f . Grundtonen är den utav svängningarna som har lägst frekvens i samlingen av periodiska svängningar (se Figur 3 ovan). Tonen består även av övertoner, de övriga periodiska svängningarna med högre frekvens, och dessa ger tonen dess karaktäristiska klangfärg.⁴² Det är övertonernas relativa styrka som gör att instrument kan skiljas från varandra. En ton på ett piano skiljer sig från samma ton på en gitarr genom att storleksförhållandena (ljudnivå) på respektive instruments övertoner är annorlunda. Musikaliskt motsvarar den första övertonen en fördubbling av frekvens och då det musikaliska intervallet oktav. Den andra övertonen är en faktor 3 i förhållande till grundfrekvensen och ger tonförhållandet 3:2, det motsvarar intervallet kvint.

Musikinstrument har genom åren förändrats och finjusterats genom att instrumentmakare strävat efter ett önskvärt ljud, eller ett ljud med nya intressanta tonkvaliteter. Denna förändring har oftast baserats på beprövad erfarenhet och tagit många år av ”evolution”.

Matematiskt kan svängningar beskrivas med sinusvågor. En av de enklaste svängningarna är den harmoniska svängningen som beskriver vad som händer när ett objekt utsätts för en kraft som är proportionell mot avståndet från jämviktsläget.⁴³ Differentialekvation för den harmoniska svängningen är

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y$$

där y beskriver läget för partikeln som utsätts för en kraft efter tiden t , κ är en konstant som beror av objektets massa och den verkande kraften. Minustecknet framför κ betonar att kraften verkar mot rörelsen. Ett exempel på en situation med en kraft som verkar proportionellt mot jämviktsläget är när ett objekt hänger i en fjäder. Differentialekvationen ovan har lösningen

$$y = A\cos(\sqrt{\kappa}t) + B\sin(\sqrt{\kappa}t),$$

som kan skrivas om till

$$y = C\sin(\sqrt{\kappa}t + \phi),$$

en beskrivning av en vågrörelse med amplitud C , vinkelfrekvens $\sqrt{\kappa}$ och fas ϕ .

⁴² Young, Hugh D. & Freedman, Roger A. (2008). *Sears And Zemansky's University Physics: With Modern Physic* (kap. 15-16). 12th edition. Addison-Wesley, ss. 531-532

⁴³ Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006, s. 13

2.3.1. Svängningar, periodicitet och Fourierserier

Följande avsnitt är en beskrivning av grunderna i Fourieranalys. Avsnittet är baserat på Dave Bensons publikation *Music: A Mathematical Offering*, där författaren har samlat viktiga begrepp från matematiken som är centrala för att förstå de matematiska byggstenarna i musik.⁴⁴ Det resonemang som beskrivits i inledningen av det matematiska avsnittet kommer i nedanstående del redogöras matematiskt.

Vinklar mäts i radianer och det går 2π radianer på en cykel. En våg med en viss frekvens f (mätt i Hertz), amplitud A och fas ϕ motsvarar

$$A \sin(2\pi ft + \phi) .$$

Som det beskrivs i inledningen av matematikavsnittet består musikaliska toner i allmänhet inte av endast en sinusvåg, utan består utav en sammansättning av flera sinusvågor med olika amplituder. Själva vågen är periodisk, den uppvisar ett repeterande mönster, och nedbrytningen av den som en summa av sinusvågor kallas Fourieranalys.⁴⁵

Jean Baptiste Joseph Fourier introducerade idén om att periodiska funktioner kan uttryckas och analyseras som en summa av de enkla trigonometriska funktionerna *cosinus* och *sinus*. Båda funktionerna $\cos x$ och $\sin x$ är periodiska med perioden 2π och satisfierar följaktligen

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi),$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) .$$

Detta betyder att en förflyttning av funktionen längs x -axeln med 2π inte påverkar funktionens värde, den uppför sig likadant efter perioden 2π , funktionen är 2π -periodisk. Det finns förstås fler funktioner som är periodiska och uppfyller kravet

$$f(x) = f(x + L) .$$

Funktionen $f(x)$ är då L -periodisk. Dessa periodiska funktioner kan uttryckas som en summa av cosinus- och sinustermer.⁴⁶ Generellt kan en funktion $f(x)$ med perioden L skrivas

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) \quad (2.1)$$

där a_0 , a_n och b_n är konstanter. Dessa kallas för Fourierkonstanter eller Fourierkoefficienter och ges av

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

⁴⁴ Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006

⁴⁵ Ibid, s. 14

⁴⁶ Ibid, s. 32

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

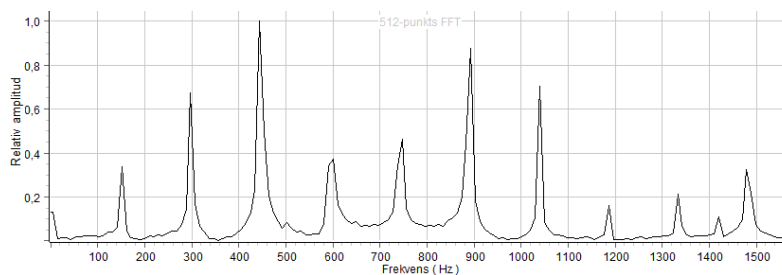
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Den periodiska funktionen $f(x)$ kan således uttryckas som en konstantterm och summan av sinus- och cosinustermer, ekvation (2.1). Svängningarna som sinus- och cosinustermer ger upphov till frekvenser som är multiplar av $f(x)$ grundfrekvens. Argumenten i de trigonometriska funktionerna är $\frac{2\pi}{L}nx$ där $\frac{2\pi}{L}$ är en konstant faktor, n är ett heltal och x ses här som tidsvariabel. Konstanterna a_n och b_n står som amplituder till varje svängning och avgör på det sättet hur mycket (kvantiteten) av varje frekvens som finns representerad i den periodiska funktionen.

Det är av intresse att kunna beskriva periodiska svängningar då det vi uppfattar som en musikalisk ton består av periodiska svängningar med avseende på tiden. Denna tons klangfärg, det vill säga det som gör att vi känner igen en röst eller ett instrument, beror av storleken på Fourierkonstanterna som i sin tur bestämmer amplituden på övertonerna. Teori om Fourierserier ger oss matematiska verktyg att beskriva en musikalisk ton.

Med begreppet spektrum menas uppdelning av en vågrörelse i dess olika frekvenser. Begreppet spektrum spelar en avgörande roll i förståelsen av musikaliska toner då man oftast vill analysera spektrumet av en ton i ett så kallat övertonsspektrum. Spektrum kan visualiseras i ett diagram genom en uppsplättning av de ingående frekvensernas ljudstyrka (se Figur 4). I ett spektrum kan endast ljudsignalens frekvens och styrka visas, information om de olika komponenternas fas går därför förlorad.⁴⁷



Figur 4. Bild som visar ett frekvensspektrum av en analyserad ton som anslås på en elgitarr.

2.3.2. Superpositionsprincipen

Att superpositionera två vågor är att addera dessa två vågors amplituder i varje punkt. Resultatet blir en signal som består av de två komponenterna men uttryckt som en signal. Detta kan

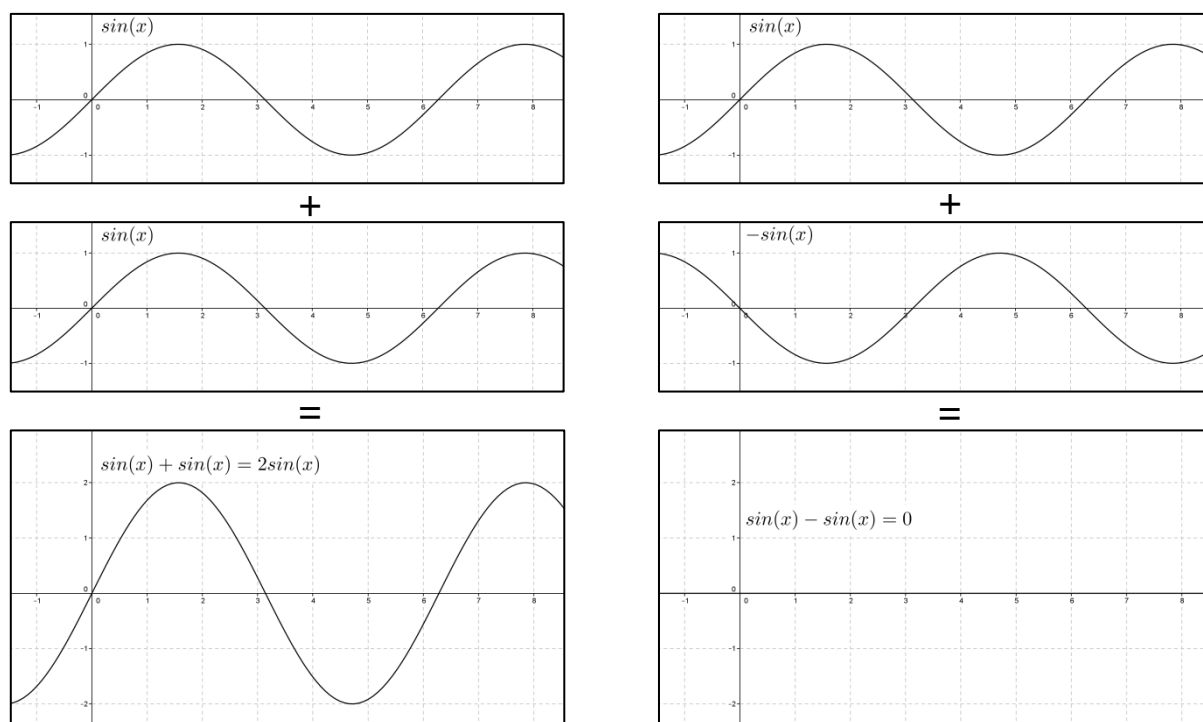
⁴⁷ Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006, ss. 17-18

jämföras med två olika ljudkällor som samverkar och når våra öron som en ljudsignal.⁴⁸ Superpositionsprincipen säger att för alla linjära system är nettoresultatet av två eller flera stimuli vid en given plats och tidpunkt summan av svaren som skulle ha orsakats av varje stimulus individuellt. Om A producerar respons X och input B producerar respons Y då ger (A + B) respons (X + Y). Dessa stimuli och respons kan vara tal, funktioner, vektorer eller tidsvarierande signaler i ett linjärt system.⁴⁹ Vågekvationen, som beskriver beteendet hos ljudvågor, är en linjär partiell differentialekvation av andra ordningen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

där c visar sig vara ljudhastigheten i det mediet som ljudvågen utbreder sig i.

I och med att differentialekvationen (2.2) är linjär kan superpositionsprincipen tillämpas för dess lösningar. I fallet med vågekvationen, medför superposition exempelvis att vågor som samtidigt träffar varandra i tiden och rummet kan förstärka eller försvaga varandra. Superpositionsprincipen innebär alltså att man lägger ihop ett flertal vågor för att åstadkomma en större eller mindre resulterande våg.⁵⁰



Figur 5. Figurer som grafiskt visar två exempel på superpositionsprincipen med två vågor; vänster respektive höger kolumn.

⁴⁸ Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006, s. 21

⁴⁹ URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle (hämtad 2013-11-05)

⁵⁰ Ibid.

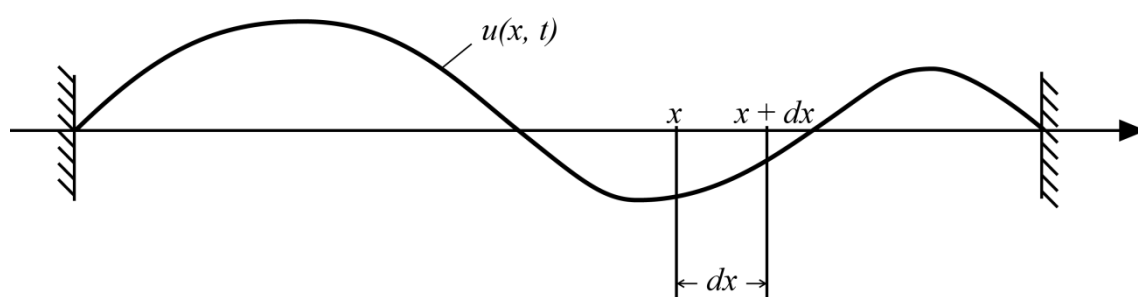
I Figur 5 visas grafiskt två exempel på superpositionsprincipen med två vågor, till vänster adderas två likadana vågor och bildar en våg som är dubbelt så stor. Till höger adderas två vågor som är varandras motsatser och de tar ut varandra vid addition. Denna enkla princip gäller även när flera vågor med olika faser, frekvenser och amplituder adderas.

Ekvation (2.2) uppträder i fysiken inom områden som akustik, elektromagnetism och flödesdynamik. Problemet hur en svängande sträng, såsom en gitarrsträng, uppför sig ger vågekvationen (2.2) som resultat. Med begynnelse- och randvillkor till differentialekvationen kan slutligen hela strängens förflyttning beskrivas.

2.3.3. Vågekvationen

För att erhålla vågekvationen som introducerats ovan ges nedan en härledning som är baserad på härledningar från *Differential equations with boundary-Value Problems* av Zill och Cullen samt *Kontinuerliga system* av Sparr och Sparr.^{51 52}

Genom att betrakta en ideal sträng som är fast inspänd i båda ändarna kan vi studera vad som sker om strängen utsätts för en yttre kraft. En ideal sträng är en homogen fullkomligt flexibel sträng utan styvhet med konstant tvärsnittsarea och konstant densitet. Vi antar att strängen vibrerar med små amplituder kring jämviktsläget. De är små i en jämförelse mot hela strängens längd. Vidare antar vi att ingen energi går förlorad vid ändpunkterna. Dessa antaganden är en förenkling eftersom syftet med verkliga strängar är att leverera energi till en vibrerande instrumentkropp som i sin tur kommer att förstärka svängningarna och sprida dem till luften. Även dämpning som naturligt förekommer av exempelvis energiförlust till luften omkring strängen försummas i denna härledning. Trots dessa antaganden och förenklingar tillåter behandlingen av en ideal sträng oss att härleda fundamentala egenskaper hos strängar och vibrationer som sedan kan appliceras för att förstå mer komplicerade problem.

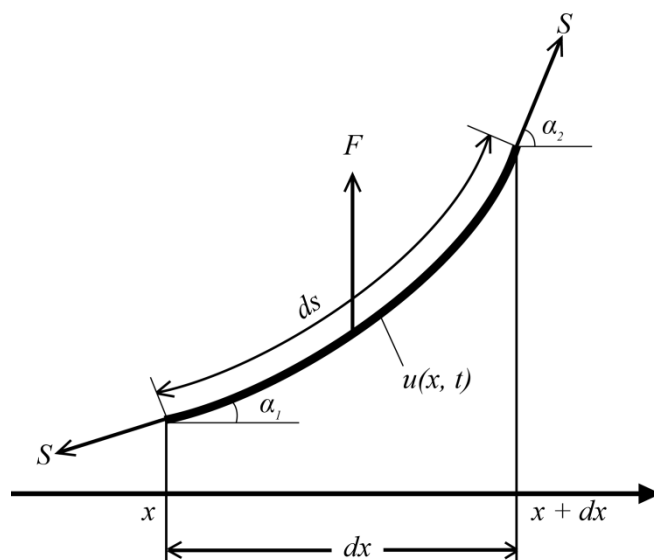


Figur 6. Ideal sträng fast inspänd i båda ändarna.

⁵¹ Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. (2009). *Differential equations with boundary-Value Problems*. 7th edition. Brooks/Cole. Cengage Learning, s. 439

⁵² Sparr, Gunnar & Sparr, Annika (1999). *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur, ss. 17-19

Strängens form ges av funktionen $u(x, t)$, det vill säga $u(x, t)$ beskriver strängens utsvängning från x -axeln beroende på x och t , där x är rumsvariabeln och t är tidsvariabeln (se Figur 6).



Figur 7. Ett kort stycke, ds , av den deformerade strängen.

Genom att använda Newtons andra lag (kraftlagen) $F = ma$ på ett litet segment av strängen ds kan ekvationen för strängens rörelse härledas. F är den yttre nettokraften, a är accelerationen hos strängen och m är massan. Andraderivatan av $u(x, t)$ med avseende på tiden ger accelerationen a . Genom Figur 7, där vi tittar på ett litet strängsegment med längden ds och spännkraften S , kan kraftlagen för i strängen ställas upp som

$$S \sin \alpha_2 - S \sin \alpha_1 = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Strängen har konstant densitet, vi inför den linjära densiteten ρ_l . Detta medför att strängens massa m kan skrivas som ett uttryck av längdsegmentet ds , $m = \rho_l ds$. Ekvationen för strängen kan då uttryckas

$$S \sin \alpha_2 - S \sin \alpha_1 = \rho_l ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Vid små vinklar α kan $\sin \alpha$ ersättas med $\tan \alpha$. Längden på strängsegmentet ds kan ersättas med dx . Insättning ger

$$S(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) = \rho_l dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(2.3)

Lutningarna vid x och ett litet steg bort $x + dx$ ges av

$$\tan \alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Den sista termen för $\tan \alpha_2$ är förändringen i lutning per längdenhet från x till $x+dx$. Substitution av tangensuttrycken i ekvation (2.3) ger

$$S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \rho_l dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Omflyttning av termer ger vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{där } c^2 = \frac{S}{\rho_l}.$$

Konstanten c visar sig vara utbredningshastigheten hos en tvärgående våg i strängen. En generell lösning till vågekvationen (d'Alemberts lösning) ger $u(x, t) = f_1(ct + x) + f_2(ct - x)$.⁵³ Denna egenskap hos lösningen beskriver då en utbredningsvåg med hastigheten c . Lösningen kan enkelt verifieras genom derivering och insättning i vågekvationen.

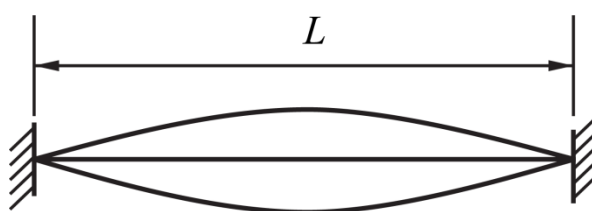
□

2.3.3.1. Lösning av vågekvation med svängande sträng

Ett problem som är av intresse att lösa är hur en svängande sträng uppför sig när den anslås. Beskrivningen av problemet och dess lösning är till stor del hämtad från boken *Kontinuerliga system* skriven av Sparr och Sparr.⁵⁴ För att lösa problemet med den svängande strängen gör vi följande antaganden; strängen är en homogen ideal sträng, fast inspänd i ändpunkterna och har längden L . Om vi betecknar strängens utsvängning som en funktion $u(x, t)$ följer det att vi har randvillkoren

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

(2.4)



Figur 8. Fast inspänd svängande sträng med längd L .

⁵³ Sparr, Gunnar & Sparr, Annika (1999). *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur, ss. 204-206

⁵⁴ Ibid, ss. 74-77

Vi har vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} . \quad (2.5)$$

Lösningen av vågekvationen erhålls genom antagandet att alla fria rörelser hos strängen kan beskrivas som en summa av funktioner där beroendet av x och t inte är kombinerad i ett enda argument. Metoden kallas *separation av variabler* eller *Bernoullis lösning*. Strängens förflyttning $u(x, t)$ kan då beskrivas av funktioner av formen

$$v(x, t) = X(x)T(t) . \quad (2.6)$$

Funktionen $v(x, t)$ är alltså en produkt av funktionen $X(x)$ som endast beror av x och $T(t)$ som endast beror av t . Genom att derivera ekvation (2.6) två gånger och substituera i vågekvationen (2.5) fås sambandet

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

I den andra ekvationen är de två variablerna separerade och uttrycken är lika endast om de är konstanta, därav konstanten λ . Från detta erhålls två differentialekvationer som har x respektive t som variabler.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 ,$$

med randvillkor $X(0) = X(L) = 0$ enligt (2.4), och

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0 .$$

Dessa ekvationer har enkla sinus- och cosinuslösningar, dessa är med tanke på randvillkoren (2.4)

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad \text{där det visar sig att } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$T_n(t) = a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(c\sqrt{\lambda_n} t) , \quad \text{där } c\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi c}{L} = 2\pi f_n ,$$

där f_n är frekvensen för $T_n(t)$. Differentialekvationen för strängens förflyttning och randvillkor satisfieras av

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) .$$

Av detta uttryck bildas en formell linjärkombination av lösningarna

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

insättning av $X_n(x)$ och $T_n(t)$ ger

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)(a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t)).$$

Som ovan, a_n och b_n är koefficienter som definieras genom begynnelsevärden som ges till strängen. I denna lösning ges ej begynnelsevärden då principen ändå framgår. Begynnelsevärdena beskriver strängens form och hastighet vid anslagsögonblicket $t = 0$, $u(, 0)$ och $u_t(x, 0)$, där $u_t(x, t)$ är tidsderivatan av $u(x, t)$. Begynnelsevärdena ger upphov till Fourierserier som genom val av konstanttermerna a_n och b_n kan fås till rätt värde.

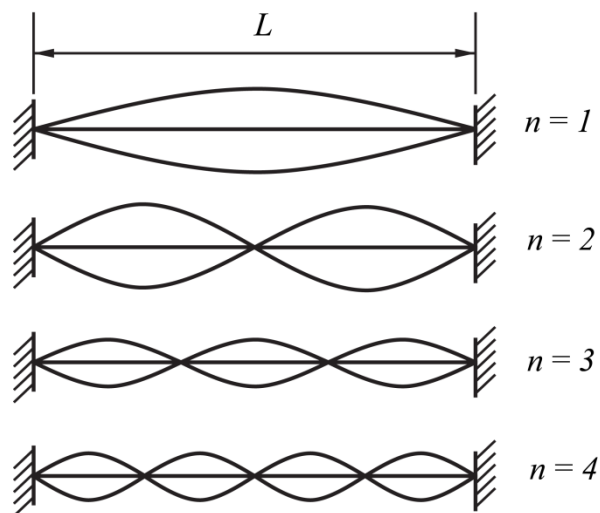
Jämför ekvationen med ekvation (2.1) som beskriver Fourierserier för en periodisk funktion. En svängande sträng ger alltså upphov till svängningar som förhåller sig harmoniskt, med harmoniskt menas heltalsmultiplar av grundfrekvensen. Beroende på var och på vilket sätt strängen slås an (begynnelsevillkor) ger den upphov till olika amplituder för de ingående moderna (a_n och b_n bestämmer ljudstyrkan av dessa moder).

En anmärkning värd att nämna är att varje term i lösningen

$$X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)T_n(t)$$

representerar en svängning där amplituden förändras periodiskt med avseende på tiden ($T_n(t)$ -faktorn) och strängens form i x -led är densamma hela tiden (sinusuttrycket).⁵⁵ Dessa svängningar kallas stående vågor, och med olika värden för n fås de ingående svängningarna som vid summering bygger upp lösningen till hur strängens form ser ut.

⁵⁵ Sparr, Gunnar & Sparr, Annika (1999). *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur, s. 76



Figur 9. De fyra lägsta stående vågorna för ett fast inspänd ideal sträng.

Betänk att formen beror av både rumsvariabeln x och tidsvariabeln t . Det som vi kallar för en grundton svarar mot den stående vågen för $n = 1$. De övriga stående vågorna $n = 2, 3, 4, \dots$ svarar mot övertoner hos strängen (se Figur 9). Övertonerna är heltalsmultiplar av grundtonen och deras styrka (storlek) bestäms av Fourierkoefficienterna.

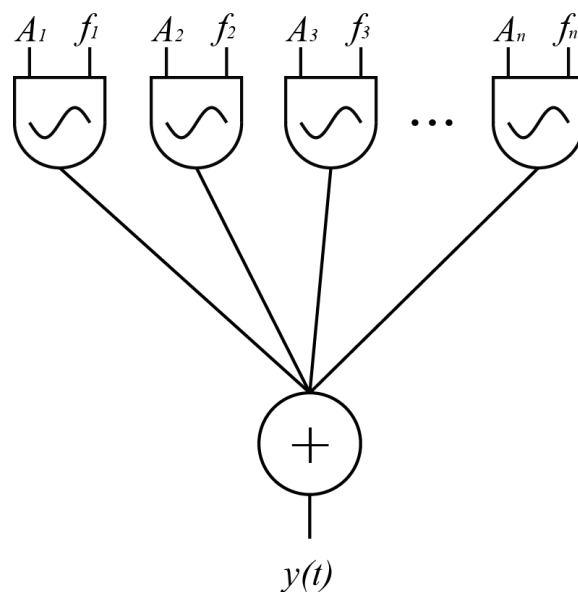
Några anmärkningar angående vissa teoretiska begränsningar är väl på sin plats. Vi förutsätter att strängen är en ideal sträng vilket det i verkligheten inte kan vara. Den matematiska teorin ger oss oändligt antal sinusvågor, vilket aldrig kan uppstå i realiteten. Strikt matematiskt betyder periodicitet en signal som upprepas i all oändlighet vilket vi heller inte har. Men i ett begränsat intervall gäller dessa förutsättningar och teorin ger oss möjligheter att beskriva uppträdandet av och beståndsdelarna i musikaliska toner.

2.4. Generera ljud med ljudsyntes

Mot bakgrund i den matematiska teori som presenterats ovan bygger syntesmetoder på att arbeta enligt en likartad men på många sätt omvänd process. Processen består av att bygga upp och skapa en ton genom att producera ljudsvängningar som förhåller sig enligt Fourierserier. Då alstras en ton, eller periodisk signal. Beroende på hur man väljer storleksordningen på övertonerna kan klangfärgen bestämmas.

Additiv syntes är en metod för att skapa syntetiskt ljud, i till exempel en dator. Den slutliga ljudsignalen bildas av en sammansättning av sinusformade svängningskomponenter. Detta grundar sig i och kan jämföras med den matematiska teorin om den svängande strängen och hur periodiska signaler kan uttryckas i Fourierserier. Enkla sinusformade funktioner genereras, adderas genom superpositionsprincipen och bygger på så sätt upp tonen. Tre komponenter behöver kontrolleras för varje sinusfunktion; amplitud, frekvens och fas. I många fall utelämnas

nas bestämning av fasen, detta för att kunna begränsa antalet parametrar.⁵⁶ Fasen för en ljudvåg har ingen betydelse för hur den sammanlagda ljudvågen uppfattas, det är endast frekvensen och styrkan hos de olika komponenterna som är av relevans.⁵⁷ Ett exempel på additiv syntes kan vara att modellera övertonsserien för en ton. Det kan ske genom försök att efterlikna övertonerna som ett riktigt instrument ger upphov till.



Figur 10. Schematisk bild över begreppet additiv syntes. Vågor med varierande amplitud A_n och frekvens f_n adderas och bildar ljudsignalen.

En av de nackdelar med additiv syntes i det allmänna fallet är den enorma mängd data som är involverad i syntesframställningen. Varje ton som alstras består av i regel fler än 30 övertoner, alla med specifik amplitud och frekvens (frekvenserna behöver ej förhålla sig harmoniskt). Metoden lämpar sig dock väl vid syntes av ljud med harmoniskt spektrum, där övertonernas frekvenser är multiplar av grundfrekvensen.⁵⁸ Detta då endast en frekvens behöver genereras, denna kan sedan multipliceras med en faktor för att generera nästa frekvenstal. Varje frekvens för övertonerna behöver inte specificeras utan alla beror av grundfrekvensen. Toner med olika grundfrekvenser kan sättas i förbindelse med en klaviatur eller liknande instrument för musikalisk kontroll.

⁵⁶ Tolonen, Tero, Välimäki, Vesa, Karjalainen, Matti (1998), *Evaluation of Modern Sound Synthesis Methods*, Helsinki University of Technology, s. 17

⁵⁷ Ibid, s. 17

⁵⁸ Ibid, s. 19

3. Metod och utförande

Arbetets olika faser med beskrivningar av genomförandet och de metoder som använts presenteras här. De ställningstaganden och grundläggande synsätt på hur en laboration utformats har grund i underlaget som presenterats i teoriavsnittet (se 2 Teoretisk bakgrund).

3.1. Roller på Vetenskapens Hus

För att i fortsättningen av denna rapport tydliggöra de olika roller som förekommer på Vetenskapens Hus presenteras här en kort begreppsförklaring av dessa:

Besöksledare – är den assistent och som finns på Vetenskapens Hus och håller i laborationen.

Elever – är de elever som kommer på besök och utför laborationer på Vetenskapens Hus.

Lärare – är de/den lärare som bokat besöket och är elevernas lärare på skolan.

Personal – utöver ovanstående precisering finns också övrig personal på Vetenskapens Hus, såsom utvecklingsledare, ämnesansvariga och kommunikatörer, då dessa åsyftas klargörs detta.

3.2. Förstudie

För att få en inblick i de laborationer som genomförs på Vetenskapens Hus har auskultation vid fyra laborationstillfällen utförts. Tre av dessa var laborationer inom fysik och handlade om "*Att undersöka toner*", en var inom matematik och handlade om kryptering.

Anteckningar över viktiga moment i laborationerna fördes under laborationstillfällena. Frågor om laborationen ställdes till de medverkande eleverna som genomförde laborationen. Dessa frågor ställdes under tiden som de utförde laborationen. Laborationstillfällena följdes av korta intervjuer med besöksledare och medföljande lärare.

För att få ytterligare insikt i och tolkning av hur ett laborationsbesök utförs på Vetenskapens Hus genomfördes en av laborationerna, *Att undersöka toner*, i egen regi med en bokad skolklass. Detta tillfälle gav särskild kännedom om laborationerna och kompletterade den information som inhämtats från auskultation och intervjuer.

3.3. Utformning av laboration

Processen med att utveckla laborationen sträcker sig över en stor del av projektets tidsplan och innefattar många av projektets områden såsom litteraturstudier, auskultation, undersökningar, utformning av programvara och vidareutveckling efter tester. Inledningen av laborationsutvecklingsfasen bestod av att inhämta och samla material.

Genom litteraturoversikten påträffades verktyg som utformats för att utvärdera laborationer inom naturvetenskap. Dessa verktyg användes som en grund för hur laborationen sedan utformades. Forskning visar att något av det viktigaste i utformningen av en laboration är att den har ett tydligt syfte.⁵⁹ Syftet ska kunna vara förståeligt för den person som håller i laborationen (besöksledare) och även för de elever som utför laborationen. Detta var en av de utgångspunkterna att ta hänsyn till i utvecklingsarbetet, både i utformning av laboration men också av besöksledarhandledning.

Genom att använda den klassificeringskarta som presenterats i teoriavsnittet erhålls en tydlig struktur där olika faktorer som påverkar utvecklingen tas upp. Utifrån modellen formulerades vad eleverna var avsedda att lära sig i laborationen. I förhållande till det och de faktorer som presenteras innan kring ämnet och utbildning kunde en grund till laborationen utvecklas. Genom frågeställningarna, "vad eleverna gör?" samt "vad eleverna lär sig?" omformades laborationsstrukturen med avseende på elevens syn på ämnet och på lärande. Modellen fungerade som ett verktyg i processen att utforma en laborationsstruktur.

Djupdykningen i den matematiska teorin kring ljud och musik gav en bred kunskapsbas. En tydlig avgränsning och urval av material var dock av stor vikt. Efter att grunden till laborationen var bestämd kunde en övergripande avgränsning för innehållet göras. Utifrån ämnesplanerna i matematik undersöktes sakinnehåll och kunskapsnivå. Laborationen anknyter till det centrala innehållet i ämnesplanen för matematik på gymnasiet.⁶⁰ Framförallt ger laborationen möjlighet att "*använda digitala hjälpmedel*", undersöka "*egenskaper hos trigonometriska funktioner*" och analysera "*matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen*" i synnerhet inom ämnena fysik och musik. Eleverna får även kunskap i att "*utvärdera en modells egenskaper och begränsningar*".

Laborationen kom att bestå av tre separata faser:

- Introduktionsfas - Bekanta sig med utrustning
- Analysfas - Undersöka ljud
- Syntesfas - Göra eget ljud

3.3.1. IKT-verktyg

Tre olika datorprogram används i laborationen; DataStudio, GeoGebra och Pure Data. Dessa tre program gör möjligt att kunna analysera ljud, syntesera en ton samt spela upp den genererade syntestonen i ett musikaliskt sammanhang. DataStudio är ett fullständigt program och används utan modifieringar. GeoGebra och Pure Data är programmeringsspråk och programmen för dessa är utformade från grunden efter de målsättningar som preciserats i projektet. I

⁵⁹ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s.63

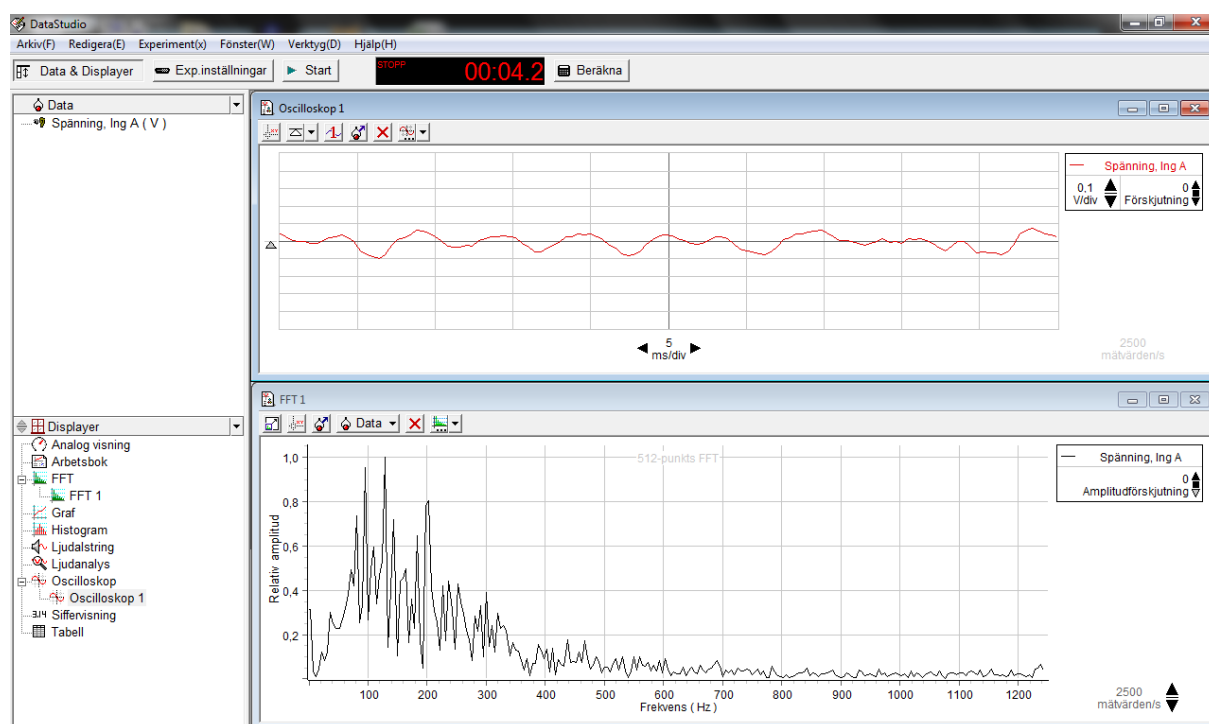
⁶⁰ Skolverket (2011), *Ämne - Matematik*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv> (hämtad 2013-10-13)

avsnitten nedan presenteras programmen och dess funktioner mer ingående samt den kunskap som har behövts i utvecklingen av dem.

3.3.1.1. Ljudanalyseringsprogram

PASCO är ett företag som tillverkar produkter som består av sensorer och programvaror som kan användas inom undervisning för att samla in, bearbeta och presentera data. Laborationsutrustning från PASCO används i laborationen för att kunna mäta och analysera ljud.

DataStudio är ett datainsamlings-, visualiserings- och analysprogram som presenterar data från PASCO-enheten. Från programmet kan man representera data i ett oscilloskop samt som en graf över frekvensspektrum. I oscilloskopet ses den spänningsvariation som mikrofonen avger, denna signal avspeglar de lufttrycksändringar som sker i luften kring mikrofonens membran. Den signalen visar då den ljudvåg som mikrofonen fångat upp. Genom programvaran görs en FFT (Fast Fourier Transform) och ljudsignalen kan analyseras. Det visas som ett frekvensspektrum där styrkan av en viss frekvens synliggörs och övertonerna i en inspelad ton kan spaltas upp (se Figur 11).



Figur 11. Skärmbildning som visar det grafiska gränssnittet i DataStudio. Överst synliggörs den inkommande ljudsignalen med ett oscilloskop. Under visas frekvensspektrum för samma inkommande ljudsignal.

3.3.1.2. GeoGebra

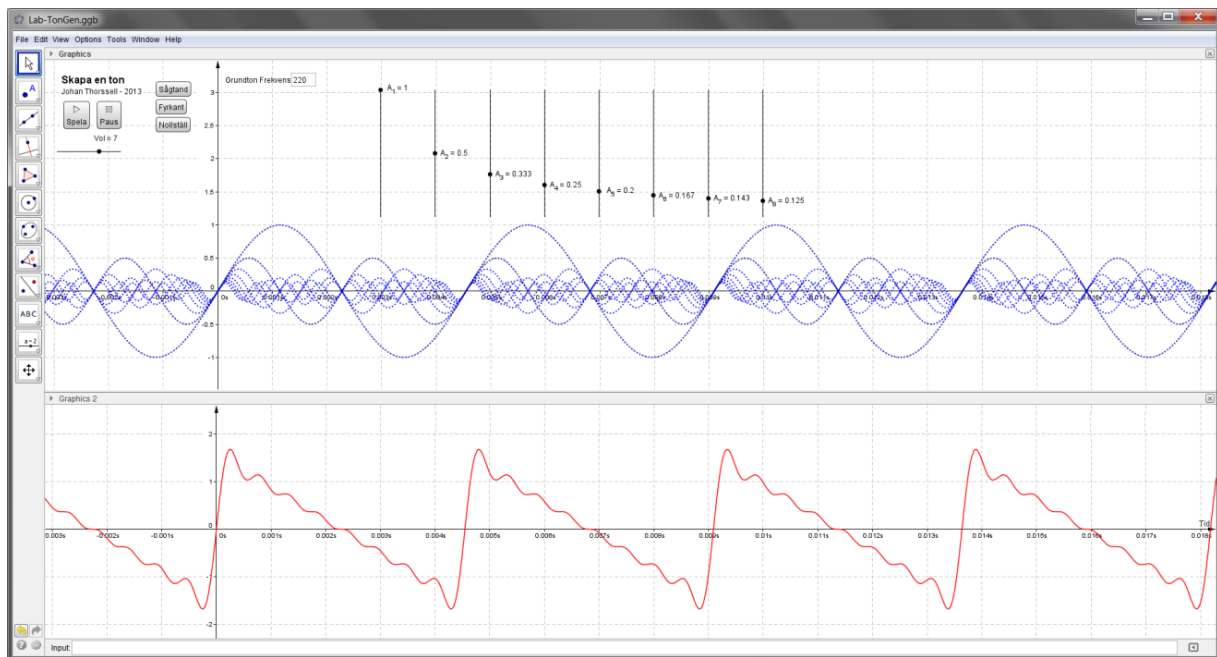
GeoGebra är en dynamisk multiplattformsprogramvara inom matematik byggt med öppen källkod. Programmet GeoGebra är framställt för att användas inom utbildning och kan behandla många matematiska områden såsom geometri, algebra, statistik och analys.⁶¹ GeoGebra visade sig vara ett lämpligt val av program för laborationsverksamheten, då det ger användaren goda möjligheter att grafiskt visa matematiska principer. Program som Maple, MatLab, Pure Data och Wolfram CDF Player undersöktes innan fastställandet att GeoGebra skulle användas. GeoGebra gav möjligheten till att grafiskt visa tonens uppbyggnad och spela upp den slutliga ljudvågen, något som för laborationsverksamheten överträffar de tidigare nämnda programmen.

Ingen fullbordad mjukvara eller program har påträffats som passar med de användningsområden som laborationen fordrar. Därför har ett program (*worksheet*) i GeoGebra skapats. Utifrån en pappersskiss på det grafiska gränssnittet skapades ett program som låter användaren skapa och manipulera sinusvågor. Programmet syftar till att ge en grafisk representation av hur en ton kan byggas upp med additiv syntes. Användaren har samtidigt möjligheten att lyssna på den resulterande tonen.

Mot bakgrund av artikeln *Matematik och det nya medialandskapet – nationell webbplats för IKT* där omedelbar återkoppling av aktiva programvaror beskrivs som en utveckling av lärande inom matematikundervisning har programmet i GeoGebra utvecklats.⁶² Designmässigt består det *worksheet* som skapats av tre fönster; ett inmatningsfönster och två grafiska fönster (se Figur 12). I inmatningsfönstret bestäms frekvens och amplitud hos grundton samt upp till 7 övertoner. I det första grafiska fönstret visas graferna för alla olika deltoner (sinusvågor). I det andra grafiska fönstret visas grafen för en våg som är summan av alla sinusvågor (ljudvågen). Den bakomliggande koden definierar i realiteten bara olika matematiska funktioner som användaren kan manipulera. Summan av alla sinusvågor (ljudvågen) kan sedan spelas upp genom att trycka på ”spela”-knappen i programmet, då aktiveras en funktion i GeoGebra som kallas *PlaySound*, den spelar upp en given matematisk funktion i högtalarna på datorn. Amplituderna kan manipuleras och ljudet ändras i realtid. Om eleverna ändrar en parameter ser de samtidigt en förändring på datorskärmen och de kan även höra den förändringen genom datorns högtalare.

⁶¹ URL: <http://www.geogebra.org> (hämtat 2013-09-25)

⁶² Jönsson, P. Lingefjärd, T. & Mehanovic, T. (2010). *Matematik och det nya medialandskapet – nationell webbplats för IKT*. Nämnaren, 1, ss. 47-50



Figur 12. Skärmbildning som visar det grafiska gränssnittet i GeoGebra. Överst amplitudkontroll av övertoner och åskådliggörande av sinusfunktionerna (blåa grafer). Under visas den sammanslagna ljudvågen (röd graf).

3.3.1.3. Pure Data

Pure Data är ett visuellt programspråk med öppen källkod och möjliggör att grafiskt skapa program utan att behöva skriva rader med kod. Det är anpassat för att exempelvis bearbeta och skapa ljud samt interagera med sensorer och inmatning från MIDI (Musical Instrument Digital Interface).⁶³

Pure Data är en så kallat *data-flow*-programmeringsspråk, där programvaran utvecklas grafiskt. Algoritmiska funktioner representeras av objekt som placeras på en skärm. Objekten är sammankopplade med kablar (*cords*) och data (exempelvis tal, variabler, listor) flödar i dessa kablar mellan objekten. Varje objekt utför en specifik uppgift, detta kan vara allt ifrån matematiska operationer till komplexa ljudfunktioner såsom tongeneratorer. Pure Data används i laborationen som en tongenerator och en ljuduppspelare. Programmet importerar amplituder till grundton och övertoner från GeoGebra och spelar upp en enkel melodi, *Blinka lilla stjärna*, med den importerade konfigurationen av ljudet. Detta för att laboranterna ska få höra det framställda ljudet i ett melodiskt sammanhang, då det i GeoGebra endast går att spela en ton i taget (ändring av grundfrekvens). Programmet är skapat för att användarmässigt endast bestå av en grön ”start”-knapp och en röd ”stop”-knapp (se Figur 13). Knapparna startar respektive stoppar uppspelningen av melodin.

⁶³ URL: <http://www.puredata.info> (hämtat 2013-09-25)

Hela besöksledarhandledningen återfinns som bilaga till denna rapport (se 7.3 Besöksledarhandledning).

Som forskningen kring laborativ verksamhet belyser, behöver den besöksledare som ska utföra laborationen formulera ett tydligt syfte med den.^{64 65} Detta syfte måste även eleverna förstå för att på bästa sätt ta till sig kunskaperna i laborationen. Besöksledarhandledningen utvecklades därav med betoning på att besöksledaren ska formulera sitt syfte med laborationen. Till besöksledarens hjälp angavs de tre didaktiska frågorna.⁶⁶ Enligt Nilsson som beskrivs av Rydstedt och Trygg behöver eleverna stimuleras genom att läraren ställer utvecklande frågor samt skapar ett klimat som möjliggör diskussioner mellan eleverna.⁶⁷ I besöksledarhandledningen ges några förslag till besöksledarna på diskussionsfrågor med koppling till laborationen som kan vara lämpliga. Laborationen syftar till att låta eleverna undersöka fenomen snarare än att följa ett recept på vad som ska göras. Detta tillvägagångssätt har utgångspunkt i vad Hofstein och Lunetta belyser i sin översiktsstudie.⁶⁸

3.4. Utvärdering

Utvärderingar är det verktyg som användes i arbetet för att inhämta dataresultat om laborationen. Dessa utvärderingsresultat ligger sedan till grund för utveckling och förbättringar av laborationen. De utvärderingar som utförts har riktat sig till lärare och elever som besökt Vetenskapens Hus, besöksledare och annan personal på Vetenskapens Hus. Utvärderingen av besöksledarhandledningen utfördes med kvalitativa frågor. Utvärdering av laborationen genomfördes med frågeformulär bestående av både kvantitativa och kvalitativa frågor.

3.4.1. Test med besöksledare

Ett tillfälle där besöksledare och biträdande handledare fick testa laborationen genomfördes. Detta verkställdes för att besöksledarna skulle få bekanta sig med laborationen, att testa utrustningen, samt att erhålla muntlig återkoppling på laborationen. Varje moment inom laborationen testades och syftet med det diskuterades. Genom att deltagarna var besöksledare blev syftet inte att genomföra laborationen i sin helhet som om de hade varit elever. Syftet blev att lyfta viktiga synpunkter om laborationen och diskutera de ingående momenten. Avslutningsvis diskuterades möjliga förbättringar och eventuella förändringar i upplägget. Under detta tillfälle diskuterades även besöksledarhandledningen muntligt.

⁶⁴ Rydstedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s. 65

⁶⁵ Ibid, s. 35

⁶⁶ Ibid, s. 63

⁶⁷ Ibid, s. 35

⁶⁸ Hofstein, A. & Lunetta, V. N. (2004), *The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century*. Sci. Ed., 88: 28–54. doi: 10.1002/sce.10106, s. 47

3.4.2. Test med elevgrupper

Två tester med elevgrupper fullbordades inom projektet i syfte att förbättra och vidareutveckla laborationen. Efter varje testgrupp fick eleverna och lärare svara på utvärderingar gällande laborationsupplevelsen. Vid de båda tillfällena var besöksledare och annan personal inbjuden dels för att lära sig den nya laborationen och dels för att ge återkoppling på innehållet.

3.4.3. Utvärdering av laboration, från lärare och elever

Den utvärdering som utfördes efter testerna av laborationen var att låta eleverna och medstående lärare fylla i ett formulär med frågor. Elever fick svara på följande:

- Vad var bra med laborationen?
- Vad har du lärt dig med laborationen?
- Skulle du vilja fortsätta prata om innehållet i dagens laboration när du kommer tillbaka till skolan?
- Jag tyckte att laborationen var... För lätt, Lagom, För svår
- Jag tyckte att laborationen var... Rolig och intressant, Tråkig och ointressant, Jag har ingen speciell åsikt

Medföljande lärare fick svara på följande frågor:

- Kommer du att använda något av innehållet i dagens laboration i klassrummet?
- Om ja i föregående fråga, beskriv gärna hur?
- Vad tyckte du var bra med laborationen?
- Var det något du saknade eller något som kändes otydligt/för svårt?
- Övriga kommentarer, tankar och synpunkter?

3.4.4. Utvärdering av besöksledarhandledning

Besöksledare inom matematik fick ta del av besöksledarhandledningen och sedan svara på följande frågor:

- Vad är dina generella synpunkter på laborationen när du tittat på handledningen?
- Hur tycker du att besöksledarhandledningen skulle fungera i din förberedelse inför en laboration?
- Vad tycker du om kunskapsnivån på materialet, utifrån din egen kunskap i ämnet?
- Vad tycker du om omfattningen av och innehållet i teoriavsnittet?
- Vad har du för förslag på förbättringar?
- Är det något ytterligare som du vill tillägga?

Besöksledarna som svarade på enkäten fick vara den testgrupp som återkopplade på hur besöksledarhandledningen skulle utformas.

3.5. Vidareutveckling

Utefter de inkomma resultaten av undersökningarna genomfördes förbättringar av besöksledarhandledningen. Denna process bestod av att samla och analysera resultaten och hitta områden där förbättringar var möjliga.

Efter ett första test av laborationen på elevgrupp ändrades laborationen efter de resultat som inkommit från enkäter och intervjuer. Dessa synpunkter och svar som insamlats ligger till grund för de förändringar och tillägg som gjorts av laborationen.

4. Resultat

Nedan presenteras resultatet från projektet. Resultatet består både av framställandet av laborationen då det är ett resultat i sig och de resultaten från utvärderingsprocessen.

4.1. Utvärdering av befintlig laboration

Utifrån de intervjuerna med besöksledare och personal vid Vetenskapens Hus kunde följande positiva och negativa aspekter av den befintliga laborationen inom fysikämnet *”Att undersöka toner”* lyftas fram:

Positivt: Elever tycker det är roligt att laborera med ljud. Laborationen ger en konkret teoretisk bakgrund. Laborationen engagerar flera sinnen.

Negativt: Ljudnivån är hög under laborationsgenomförandet. Laborationen är inte riktigt lämpad för gymnasiet. Laborationen är tidsmässigt för kort.

Dessa resultat var utgångspunkten i arbetet med att utforma laborationen. Ljudnivån på laborationen var ett av det mest uppmärksammade problemet. Den laboration som utformats i projektet kom att i största del använda elgittarer som analysinstrument istället för som i den befintliga laborationen där elevernas egen röst varit det enda källan att undersöka. Det har gjort att ljudnivån i den utvecklade laborationen sjunkit avsevärt i jämförelse.

Då den befintliga laborationen utförs på 45 minuter uppkommer en svårighet med att anpassa den med andra laborationen på Vetenskapens Hus. De flesta av laborationerna har en längd av 90 minuter och vid besök med större klasser delas dessa ofta upp och situationer där olika laborationer ska köras samtidigt uppkommer. En stor del av den utrustning för att analysera ljud som används i den befintliga laborationen är väl lämpad för att förstå ljud och toner.

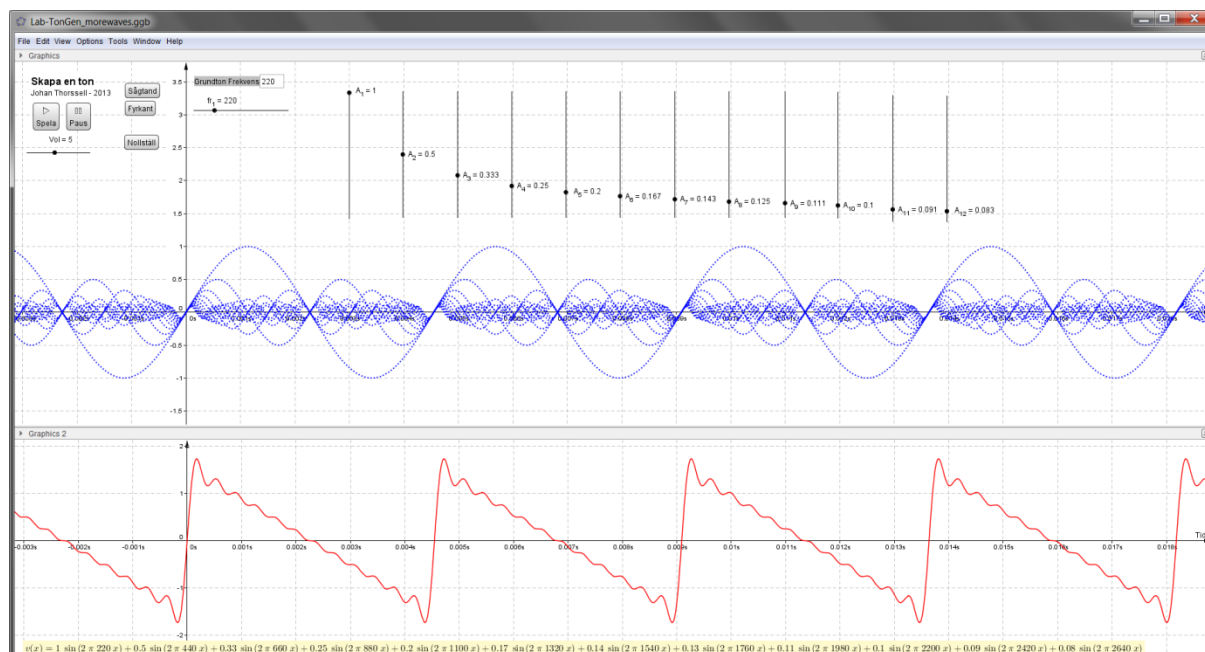
4.2. Utvecklat material

Här sammanfattas ett urval av den konstruktiva kritik som mottogs från besöksledare angående den mjukvara som användes i laborationen. Genom utvärderingen av det utvecklade materialet uppenbarade det sig

- att det fanns svårigheter med att ändra mellan de olika programen i laborationen
- att det fanns svårigheter med att förstå kopplingen mellan teori och praktik
- en önskan om att laboranterna vill kunna välja melodi alternativt spela upp ljudet själv
- att kunna manipulera fler övertoner var önskvärt
- laborationen består av många olika delmoment, som bygger på att all teknik fungerar
- att kunna byta frekvens i GeoGebra är eftersträvt

Synpunkterna har resulterat i förändringar av programmet i GeoGebra, de förändringar som gjordes var

- En ökning till 12 olika reglage (sliders) för manipulation av en grundton samt 11 övertoner.
- En slider placerades för att enklare kunna bestämma frekvensen (tonhöjden) i GeoGebra.
- En textruta som anger den matematiska formeln infogades



Figur 14. Skärmbildning som visar det slutgiltiga grafiska gränssnittet för programmet skapat i GeoGebra.

4.3. Utvärdering av besöksledarhandledning

I den enkät som skickats till alla besöksledare inom matematik framfördes bland annat följande konstruktiva kritik om laborationshandledningen

- att dela upp laborationsmomenten i fyra delar, lägg till teoridel
- att det i besöksledarhandledningen behövs en tydligare betoning på att undvika att laborationen endast blir en föreläsning
- att visa en bild på laborationsuppställningen skulle hjälpa besöksledarna
- efterfrågan på mer inspiration för besöksledare att själva leta rätt på fördjupningsmaterial
- typografiska synpunkter och tydliggöranden enligt mall på Vetenskapens Hus

De ovan nämnda utvärderingsresultat har använts i revidering av besöksledarhandledningen. Övriga resultat från utvärderingen av besöksledarhandledningen visar på att de tillfrågade tycker att innehållet är relevant och skapar mycket goda förutsättningar till att förbereda sig inför laborationen.

4.4. Test av laboration

Nedan redovisas de testresultat som har motiverat vidareutvecklingen av själva laborationen.

I testklasserna angav största delen av eleverna i enkätundersökningen att de tyckte att laborationen var rolig och intressant. Ett fåtal elever angav att laborationen blev stökig och rörig. De flesta elever svarade att kunskapsnivån i laborationen var *lagom*. En elev uppgav att det var för svårt att hänga med.

Genom den kvalitativa undersökningen som genomfördes bland medföljande lärare visade det sig att lärare tänker återkoppla till laborationen i klassrummet. Lärare angav att laborationen har ett bra upplägg som varvar teori med praktik. Vidare kom det fram att laborationen ger en bra insikt om vad ljud är och ”en känsla” av att vilja veta mer.

De ändringar som gjordes efter första och andra testet med klasser grundade sig i diskussion med besöksledare, biträdande handledare och annan personal på Vetenskapens Hus. Många givande idéer och tips på förbättringar och justeringar av upplägget mottogs. Några av dessa relevanta förändringar var att laborationen bestämdes att innefatta en kort paus på omkring 5 minuter där byte av program på datorerna (från DataStudio till GeoGebra) var möjligt att göra smidigt. Likaså bestämdes att uppspelningsprogrammet i Pure Data endast manövreras av besöksledaren.

4.5. Den slutgiltiga laborationen

Efter de testomgångarna och nödvändiga revideringar efter utvärderingarna blev laborationen färdigställd i sin helhet enligt projektets syfte och målsättningar. Projektets grundläggande mål som har varit att utforma en laboration med tillhörande material och besöksledarhandledning kan betraktas som uppfyllt. Det innehåll, som bildar en del av resultatet, med beskrivning för lärare, besöksledarhandledning och skärmbildningar av dataprogram kan påträffas som bilagor (se 7 Bilagor).

5. Diskussion

I nedanstående avsnitt följer en diskussion utifrån syfte, frågeställningar och den teoretiska bakgrunden av resultaten som framkommit i projektet.

5.1. Laborationen

Flera delar av innehållet i laborationen är utformat med hänsyn till den litteratur som presenteras i den teoretiska bakgrunden. Mycket av den forskning kring laborativ verksamhet som lyfts fram i detta arbete poängterar betydelsen av att besöksledare bör formulera ett syfte med laborationen för att öka förståelsen hos eleverna.⁶⁹ Utformningen av besöksledarhandledningen tar upp detta som en viktig pedagogisk aspekt i besöksledarnas förberedande arbete inför laborationen. De olika faserna i laborationen har som mål att fungera som en grundlig struktur för besöksledarna i sitt mål att formulera ett syfte med laborationen. I de testklasser som utförde laborationen presenterades syftet tydligt i förväg och upprepades inför de olika delmomenten i laborationen. Laborationstillfället var avsett för att eleverna inte bara skulle göra något utan även få en förståelse för något, detta i enlighet med Rystedt och Trygg.⁷⁰ Eleverna skulle ges möjlighet att själva fråga sig vad de ville komma fram till med laborationen. Under teststillfällena med elever fungerade den planerade strukturen väl. Upplägget gav utrymme för diskussion av de frågeställningar som presenterats i inledningen av laborationen, detta visar på betydelsen av att formulera ett syfte samt att föra diskussioner med eleverna under laborationen. Genom att ställa frågor till eleverna får besöksledaren en uppfattning om vad eleverna har lärt sig och en anpassning av undervisningsnivån kan göras.

Genom att följa den föreskrivna strukturen framkallades det lärande som laborationen hade för avsikt att åstadkomma. Detta med bakgrund mot teorin samt de diskussioner som fördes under testlaborationerna. Genom diskussionerna med eleverna framkom att eleverna lärt sig nya kunskaper om musikens matematik. Dock är lärandet svårt att mäta då det inte alltid behöver avspeglas i det som elever säger.

Enligt de resultaten från testklasserna visade det sig att presentationen av laborationen enligt eleverna var intresseväckande och kunskapsmässigt på en god nivå, vilket stödjer laborationens syfte med att introducera intresseväckande matematik. Ett av projektets syfte, att hjälpa läraren att relatera laborationens innehåll med sin undervisning, kan ses som uppfyllt då medföljande lärare entydigt hade tänkt sig använda sig av laborationens innehåll i den fortsatta undervisningen.

Laborationen sätts in i ett kommunikativt sammanhang. Eleverna arbetar i grupper om 2-3 stycken under laborationen, vilket innebär att laborationsupplägget uppmanar till diskussioner mellan lärare, elever och besöksledare. Som hjälp för besöksledaren formulerades ett antal förslag på diskussionsfrågor i besöksledarhandledningen för att kunna lyfta diskussioner un-

⁶⁹ Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet, s.65

⁷⁰ Ibid, s. 63

der laborationen. Förmågan att kunna formulera och kommunicera sina tankar språkligt blir en central del i laborationen som kan kopplas mot det sociokulturella perspektivet på lärande. I laborationen ingår även att eleverna får använda digitala analysverktyg samt dataprogram för att modellera och tolka ljud, vilket kan ses som ett lärande med hjälp av redskap i analogi med ett sociokulturellt perspektiv på lärande.

I utvecklingsprocessen av laborationen användes klassificeringskartan som finns beskriven i teoriavsnittet. Kartan användes i början av utvecklingsprocessen och den praktiska nyttan av klassificeringskartan stämmer översens med vad artikeln föreslår.⁷¹ Som ett inledande verktyg i designprocessen av laborationen gav klassificeringskartan önskat resultat. Kartan strukturerar och informerar om de olika sambanden mellan nivåer av kunskap hos de olika deltagarna.

Laborationens avgränsning mot gymnasiet gjordes i syfte att kunna begränsa kunskapsinnehåll i förhållande till ämnesplaner. Avgränsningen gjordes även för att ge goda möjligheter att från det utvecklade materialet senare kunna vidareutveckla laborationen för elevgrupper i lägre årskurser. Då materialet i laborationen är anpassat för den högsta nivågruppen som besöker Vetenskapens Hus (gymnasiet) är förhoppningen att det ska bli enkelt att begränsa och, om det skulle behövas, förändra kunskapsinnehållet för lägre årskurser.

5.1.1. Laborationsmaterial

Det utformade laborationsmaterialet består i denna laboration av den digitala programvara som eleverna använder under laborationen. I likhet med artiklar inom att användandet av IKT visar laborationens utvecklade IKT-material att det främjar behandlingen av matematiska uttrycksformer och representationer.⁷² Eleverna behöver inte sitta med penna och papper för att räkna ut förändringar i frekvens och amplitud, de behöver endast flytta på några reglage i programmet för att en omedelbar förändring ska ske.

De tillvägagångssätt och kunskap som använts i utformandet och programmerandet av IKT-materialet (de använda datorprogrammen) redovisas i avsnittet Metod och utförande. De kunskaper och färdigheter om programvarornas funktioner har inhämtats i kurser under studietiden. För manövrering av programmen krävs ingen speciell kunskap annat än en någorlunda kompetent datorvana. Beskrivningar av och till alla programmen finns i besöksledarhandledningen.

⁷¹ Tiberghien, A & Millar, R. et al. (2001), *An analysis of labwork tasks used in science teaching at upper secondary school and university levels in several European countries*. Sci. Ed., 85: 483–508. doi: 10.1002/sce.1020, s. 488

⁷² Gustafsson, I-M, Jakobsson, M, Nilsson, I, Zippert, M, m.fl. (2011). *Matematiska uttrycksformer och representationer*. Nämnaren 36 (3), s. 36.

5.2. Relation till ämnesplaner

Inom matematikämnet på gymnasiet finns förmågor som eleven ska uppfylla. De tre förmågor som har varit centrala för denna laboration är innebörden av matematiska begrepp, använda och utvärdera en modell samt relatera matematiken till andra ämnen.⁷³ Laborationen framställer toner i matematiska termer. Eleverna kommer alltså genom laborationen att möta och analysera matematiska begrepp. Vidare ger laborationen möjlighet att använda en modells egenskaper. Eleverna får arbeta med ljudsyntes som är en matematisk modell för hur ljud kan skapas. I laborationen presenteras den matematik som ligger till grund för den fysikaliska förståelsen av musik. Laborationen behandlar inte endast matematik, utan relaterar den både till fysikaliska företeelser och till musikaliska begrepp. Alla dessa tre förmågor är således aktuella för laborationsdeltagarna. I matematikämnets syfte beskrivs att eleven ska utveckla förmågan till att använda digitala hjälpmedel. Hela laborationen utgår från att använda en dator vid både analys och modellering, vilket gör detta syfte mycket relevant för laborationen.

Den kurs som bäst lämpar sig till laborationen är kursen Matematik 4. I denna kurs är det centrala innehållet specificerat till att innehålla egenskaper hos trigonometriska funktioner. Stora delar av laborationens innehåll är egenskaper hos trigonometriska funktioner. Laborationen kan för denna kurs användas som ett medel för kunskapsuppfyllelse.

5.3. Slutsats

Det övergripande målet för projektet, att utveckla en matematiklaboration vid Vetenskapens Hus, är slutfört. En färdig laboration som kan användas vid Vetenskapens Hus har presenterats i arbetet. Av arbetet kan några väsentliga slutsatser dras. Genom att använda de metoder och tillvägagångssätt som dokumenterats för detta projekt kan en fungerande laboration inom Fourieranalys utformas, detta med stöd i den teoretiska bakgrunden och de utvärderingar som gjorts. Den teoretiska bakgrunden presenterar den matematik som beskriver ljud och musik i detta sammanhang. Urvalet av matematiskt stoff speglar avgränsningen i materialet.

De besöksledare som framöver ska utföra laborationen ser förberedelsematerialet (besöksledarhandledningen) som relevant. Utifrån elever och lärares utvärderingar har laborationen fördjupat kunskaper och ökat intresset hos elever. Lärare kommer att använda sig av innehållet i sin undervisning, vilket innebär att laborationens och projektets syfte är uppfyllt.

5.4. Fortsatta studier

Genom att ständigt utvärdera laborationen kommer den efter de resultat som insamlas att kunna förändras, förbättras och anpassas efter olika elevgrupper. Fler enkäter med mer laborationsspecifika frågor skulle kunna utformas och prövas på elevgrupper och lärare. Detta i syfte att frambringa en bättre passande laboration. Utvärderingarna kan fungera som hjälp till

⁷³ Skolverket (2011), *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705> (hämtad 2013-10-13), s. 90

lärare och besöksledare i arbetet att uppnå ämnesplanerna samt för eleverna att tillägna sig ny kunskap på bästa lämpliga sätt.

Då detta projekt har haft avsikten att utveckla en laboration på gymnasienivå finns potential att även anpassa laborationen för andra nivågrupper (exempelvis för högstadiet). Förhoppningen finns att materialet som utformas i detta arbete ska kunna fungera som en god grund att hämta kunskap och inspiration ifrån.

Utifrån denna laboration är ett förslag att en påbyggnadslaboration utvecklas. I den laborationen skulle eleverna kunna komma tillbaka och fortsätta att laborera med ljud och matematik. Denna laboration skulle kräva mer omfattande förkunskaper inom musik och matematik. Fler syntesmetoder, exempelvis FM-syntes (Frequency modulation), skulle kunna introduceras och/eller en större matematisk fördjupning inom ämnet utföras.

Vidare kan laborationen utvecklas i en riktning där musiken får en ännu större betydelse. Fler melodier kan utvecklas för uppspelning i Pure Data. Användning av till exempel MIDI-klavatur för uppspelning kan ge ett närmare intryck av musiken och musikproduktion.

Slutligen skulle laborationen kunna utvecklas ännu mer mot att vara ämnesövergripande. Detta skulle kunna ske genom större koppling mot fysiken och den fysikaliska beskrivningen av ljud och musik. Det skulle även gå att få en större koppling mot teknik och programmering då datorer redan används i laborationen. Programmering av en ljudslina eller en förvrängning av ett inspelat ljud kan vara en möjlighet till denna koppling.

6. Referenser

- Abrahams, Ian & Millar, Robin (2008). *Does Practical Work Really Work? A study of the effectiveness of practical work as a teaching and learning method in school science*. International Journal of Science Education. Vol. 30, Iss. 14
- Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006
- Deacon, Christopher & Hajek, Allyson (2011). *Student Perceptions of the Value of Physics Laboratories*. International Journal of Science Education. Vol. 33, Iss. 7
- Eriksson, Mikael & Lilliesköld, Joakim (2007). *Handbok för mindre projekt*. Stockholm: Liber.
- Gustafsson, I-M, Jakobsson, M, Nilsson, I, Zippert, M, m.fl. (2011). *Matematiska uttrycksformer och representationer*. Nämnaren 36 (3), ss. 36-45
- Hofstein, A. and Lunetta, V. N. (2004), *The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century*. Sci. Ed., 88: 28–54. doi: 10.1002/sce.10106
- Högström, Per, Ottander, Christina & Benckert, Sylvia (2006). *Lärares mål med laborativt arbete: Utveckla förståelse och intresse*. Nordina
- Johansson, Bo & Svedner, Per Olov (2010). *Examensarbetet i lärarutbildningen*. 5. uppl. Uppsala: Kunskapsföretaget
- Jönsson, P. Lingefjärd, T. & Mehanovic, T. (2010). *Matematik och det nya medialandskapet – nationell webbplats för IKT*. Nämnaren, 1, s. 81-84
- Katz, Victor J. (2009). *A history of mathematics. An introduction*, 3rd edition, Addison-Wesley
- Kullberg, Birgitta (2004). *Etnografi i klassrummet* (2:a Uppl.). Lund: Studentlitteratur
- Lingefjärd, Thomas (2008). *GeoGebra: Samspelet mellan algebra och geometri*. Nämnaren 35(4), s 28-31.
- Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet
- Skolverket (2011), *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*. Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2724> (hämtad 2013-10-13)
- Skolverket (2011), *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola*, Stockholm: Skolverket. URL: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705> (hämtad 2013-10-13)

- Sparr, Gunnar & Sparr, Annika (1999). *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur
- Säljö, Roger (2000). *Lärande i praktiken – ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma
- Tiberghien, A., Veillard, L., Le Maréchal, J.-F., Buty, C. and Millar, R. (2001), *An analysis of labwork tasks used in science teaching at upper secondary school and university levels in several European countries*. Sci. Ed., 85: 483–508. doi: 10.1002/sce.1020
- Tolonen, Tero, Välimäki, Vesa, Karjalainen, Matti (1998), *Evaluation of Modern Sound Synthesis Methods*, Helsinki University of Technology
- Young, Hugh D. & Freedman, Roger A. (2008). *Sears And Zemansky's University Physics: With Modern Physic* (kap. 15-16). 12th edition. Addison-Wesley
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. (2009). *Differential equations with boundary-Value Problems* (kap. 11). 7th edition. Brooks/Cole. Cengage Learning

6.1. Referenser på Internet

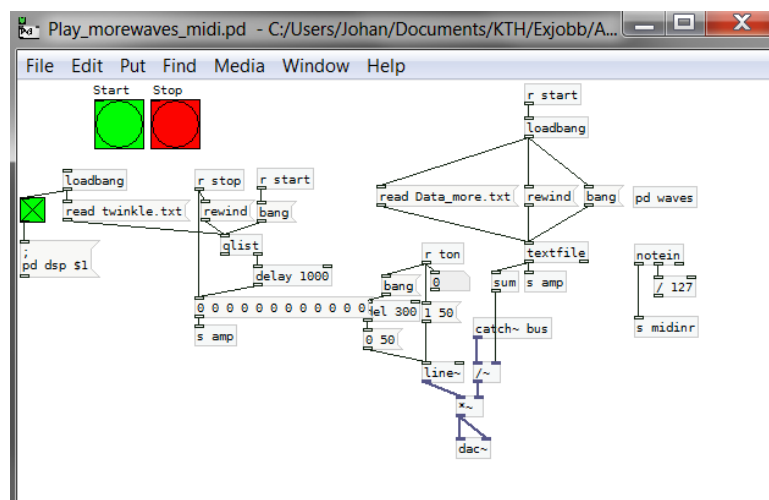
- GeoGebra: <http://www.geogebra.org> (hämtat 2013-09-25)
- Pure Data: <http://www.puredata.info> (hämtat 2013-09-25)
- Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Acoustics> (Hämtat 2013-10-29)
- Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle (hämtad 2013-11-05)
- KTH - Examensarbete Civilingenjör och Lärare:
<http://www.kth.se/student/program/examensarbete/examensarbete-sci?programme=cl> (hämtad 2013-11-13).
- Vetenskapens Hus: <http://www.vetenskapenshus.se> (hämtad 2013-11-13).

7. Bilagor

7.1. Bilder från laborationen



Bild på laborationsuppställning



Skärmavbildning som visar uppspelningsprogrammet i Pure Data

7.2. Beskrivning till lärare

Musikens matematik

För gymnasieskolan

Varför låter musikinstrument olika? Hur kan vi höra skillnad på ett piano och en trumpet då samma ton spelas? Hur kan man skapa (syntesera) ett eget musikaliskt ljud utifrån kunskaper om toner, vågor och ljudets sammansättning? Denna laboration behandlar dessa frågor och fördjupar kunskaper om hur matematik används för att beskriva och förstå ljud och musik.



Anknytning till läroplan: Laborationen anknyter naturligt till det centrala innehållet i ämnesplanen för matematik på gymnasiet. Framförallt ger laborationen möjlighet att "använda digitala hjälpmedel", undersöka "egenskaper hos trigonometriska funktioner" och analysera "matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen" i synnerhet inom ämnena fysik och musik. Eleverna får även kunskap i att "utvärdera en modells egenskaper och begränsningar".

Nyckelord: Fourieranalys, matematisk modellering, vågor, musik

Målgrupp: Gymnasieskolan

Tid: 1,5 timmar

Gruppstorlek: Halvklass (Går att kombinera med annan aktivitet för klassens andra halva)

Lokal: Vetenskapens Hus

Förkunskaper: Vågor och svängningar.

Teori: Laborationen är av undersökande karaktär och fördjupar kunskaper om vågor, amplituder, frekvenser, periodicitet, övertoner och Fourierserier. Den bakomliggande teorin är Fourieranalys och eleverna får möjlighet att bekanta sig den matematik som beskriver ljud. Laborationen förenar begrepp från musik, fysik och matematik.

Laboration: Eleverna får använda sig av analysutrustning för att undersöka ljud som sin egen röst och riktiga musikinstrument. De undersöker den bakomliggande matematiska teorin kring vågor och beskrivandet av toner. I laborationen får deltagarna lära sig hur övertoner har en avgörande roll i ett musikinstrumentets karaktäristiska klang. Därefter får de syntesera sitt eget ljud (matematisk modellering) utifrån kunskaper från laborationen. De får möjlighet att lyssna på ljudet som de själva skapat, uppspelat som en melodi.

Syftet med laborationen är att ge eleverna ett nytt och intressant perspektiv på matematiken (matematik i musik), fördjupa kunskaper om periodiska vågor (enkel Fourieranalys på gymnasiet och öka kunskapen om matematisk modellering) samt öka kunskapen om matematisk modellering och samtidigt knyta den matematiska förståelsen till något vardagligt.

7.3. Besöksledarhandledning

7 december 2013

Musikens matematik



Besöksledarhandledning

Av Johan Thorssell



VETENSKAPENS HUS

AlbaNova universitetscentrum, 106 91 Stockholm
08 - 553 784 60, vh@vetenskapenshus.se, www.vetenskapenshus.se



Introduktion

Genom att studera de matematiska samband som finns hos toner i musik kan man behandla flera matematiska områden på ett roligt, intresseväckande och annorlunda sätt. Denna laboration tar upp centrala matematiska begrepp, som till exempel periodiska svängningar, Fourieranalys och matematisk modellering. Eleverna får använda sig av analysutrustning för att undersöka ljud och toner. Sedan får de matematiskt modellera ett eget elektroniskt ljud.

De frågeställningar som laborationen utgår från är: Varför låter musikinstrument olika? Hur kan man skapa (syntesera) ett eget musikaliskt ljud utifrån kunskaper om toner, vågor och ljudets sammansättning?

Förhoppningen med denna besöksledarhandledning är att ge besöksledaren en teoretisk grund och samtidigt fungera som underlag och stöd i utformningen av ett elevbesök. Handledningen består av ett teoriavsnitt och en laborationsdel med förslag på elev- och diskussionsuppgifter och ger förslag på ett möjligt upplägg av laborationen. Den innehåller även en beskrivning, med steg-för-steg instruktioner, av de dataprogram som används. Tanken är att visa ett möjligt upplägg på hur laborationstillfället kan utföras.

I handledningen finns mycket material att ta till sig och det kan vara svårt att få med allt under ett laborationspass. Innehållet här ska fungera som en vägledning och ge utrymme för anpassning. Det är upp till varje besöksledare att själv avgöra om man skall koncentrera sig på något särskilt avsnitt. För bästa utfall rekommenderas att varje assistent själv prövar de olika momenten i laborationen. Detta för att själv kunna inse och vara förberedd på svårigheter som eleverna kan möta.

Som besöksledare bör man tydligt för sig själv formulera syftet med och utforma strukturen i laborationen. Detta gör att laborationen får en tydlig riktning som hjälper eleverna att förstå varför de utför den samt en klar struktur som lättsamt ger eleven möjlighet för lärande.

Målgrupp	Tid	Lokal	Antal elever
Gy	90 min, hela året	Vetenskapens Hus	Halvklass (~ 12 st)

Koppling till gymnasiets ämnesplan i matematik

Laborationen anknyter naturligt till det centrala innehållet i ämnesplanen för matematik på gymnasiet. Framförallt ger laborationen möjlighet att "använda digitala hjälpmedel", undersöka "egenskaper hos trigonometriska funktioner" och analysera "matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen" i synnerhet inom ämnena fysik och musik. Eleverna får även kunskap i att "utvärdera en modells egenskaper och begränsningar".

Syfte

Syftet med laborationen är att ge eleverna ett nytt och intressant perspektiv på matematiken (matematik i musik), fördjupa kunskaper om periodiska vågor (enkel Fourieranalys på gymnasiet) samt öka kunskapen om matematisk modellering och knyta den matematiska förståelsen till något vardagligt.

Teori

Följande avsnitt presenterar den bakomliggande teorin till laborationen. Förhoppningen är att sammanfatta den teori som laborationen bygger på.

Bakgrund och historik

Relationen mellan musik och matematik har länge fascinerat människan. Många matematiker har fångats av musik och musikinstrument, de har med utgångspunkt från musiken upptäckt och formulerat intressanta framstående matematiska insikter.

Redan hos antikens matematiker fanns intresset att förstå musikinstrument (ca 500 år före vår tideräkning). Upptäckten att harmoni mellan toner kunde beskrivas med enkla talförhållanden var något som fascinerade Pythagoras. Denna fascination var så stor att Pythagoras och hans anhängare hade idén om att planeters banor kunde beskrivas med harmoniska förhållanden. Tal var enligt Pythagoréerna "substansen av allting", särskilt de positiva heltalen ansågs vara grundläggande för universums uppbyggnad. Rörelser och positioner hos stjärnor och planeter beskrevs med tal och geometriska former. Musikens intervall, i synnerhet de som ansågs välljudande, kunde beskrivas med enkla talförhållanden. Då två strängar anslås med längdförhållandet 2:1 hörs det melodiska intervall som inom musiken benämns oktav, förhållandet 3:2 ger det musikaliska intervallet kvint och förhållandet 4:3 ger intervallet kvart. De intervall som inte anses speciellt välljudande bildas av mer komplexa talförhållanden. Dessa musikaliska intervall, i synnerhet de välljudande, är grundläggande för musikens uppbyggnad och utifrån dem kan en hel musikalisk skala skapas.

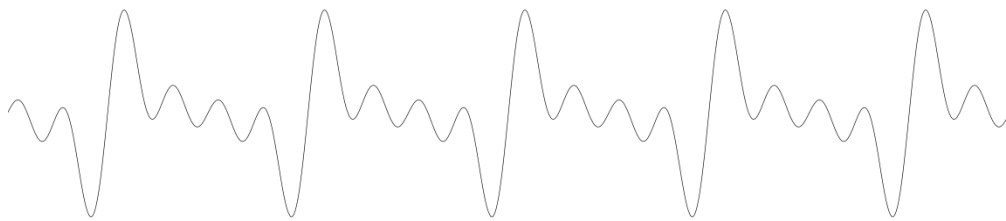
På 1700-talet gav studiet av vågekvationen för en svängande sträng upphov till metoder för lösningar av partiella differentialekvationer (mer om detta i teoriavsnittet) och en ökad förståelse för rörelsen hos strängen. Brook Taylor, Leonard Euler, Jean LeRond d'Alembert, John Bernoulli och Daniel Bernoulli är några framstående matematiker som studerat musikinstrument och vågekvationen och dess lösningsmetoder. Jean Baptiste Fourier (född år 1768) var den matematiker som slutligen samlade samman och kunde knyta ihop de matematiska verktyg för att sammanställa teorin som bland annat beskriver musikaliska toner.

Idag kan ljud och musik spelas in, sparas och åter spelas upp. Genom tekniska redskap kan analys och manipulation av ljud utföras. Inom dagens musikskapande används datorer och tekniska hjälpmedel i allt större utsträckning. Kunskapen om hur ljud kan manipuleras och analyseras blir därmed viktigare. Den digitala framställningen av ljud (ljudsyntes) ger en ny intressant och betydelsefull förbindelse mellan matematik och musik.

Toner och ljud

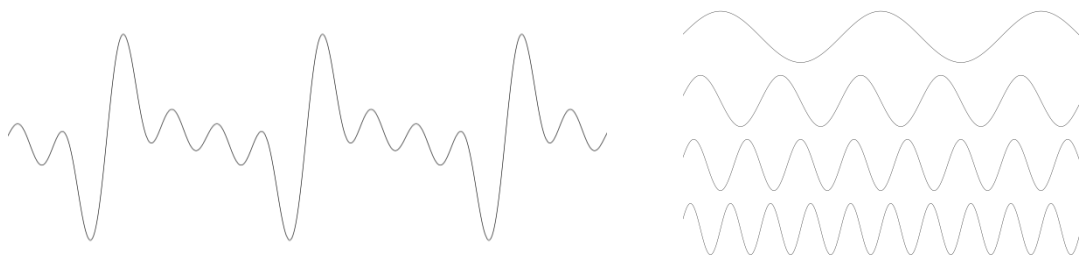
Ljud är en uppfattning av förändringar i lufttryck som öronen registrerar. Luftens vibrationer får trumhinnan att vibrera och genom detta fortplantas ljudet vidare till hörselsnäckan via små ben i innerörat. Hörselsnäckan registrerar ljudets styrka och frekvenser. Dessa signaler skickas vidare till hjärnan och vi uppfattar ljudet. Då uppfattningen av ljudet beror av hur tryckförändringarna som når öronen uppför sig är forskning inom detta av intresse. Akustik är vetenskapen där man studerar ljud och vibrationer i luften. Genom en förståelse av hur dessa vibrationer alstras och uppför sig kan modeller och beskrivningar av verkligheten framställas.

En musikalisk ton består av en periodisk svängning; förändring i lufttryck som upprepar sig efter ett visst tidsintervall. En stor del av det ljud som når våra öron är inte periodiskt, och uppfattas då som ett ljud utan en precis tonhöjd. Figuren nedan visar en periodisk signal som skulle kunna representera en periodisk svängningsrörelse i luften. Den periodiska svängningen kan ha olika utseende och form, det är periodiciteten som gör den till en ton med en uppfattbar tonhöjd.



Figur av en periodisk svängningsrörelse kan beskrivas genom att åskådliggöra dess förflyttning från jämviktsläget.

Den musikaliska tonens rätt så komplicerade ljudsignal kan enligt teorin om Fourierserier delas upp i enklare grundsvängningar (trigonometriska svängningar) av olika frekvens och amplitud. En periodisk signal kan alltså beskrivas som en summa av enklare svängningar (se figur nedan).



Figur av den periodiska signalen till vänster som består av en sammanslagning av de fyra enklare svängningarna som ses till höger.

För periodiska signaler gäller att om den lägsta frekvensen bland svängningarna har frekvensen f visar det sig att de andra svängningarnas frekvenser är heltalsmultiplar av f . Det betyder då att nästkommande svängning har frekvensen $2f$ och nästa $3f$. Själva tonhöjden på en ton uppfattar vi genom grundtonen eller grundfrekvensen f . Grundtonen är den lägsta frekvensen i en samling av periodiska svängningar (se figur ovan). Tonen består även av övertoner, de övriga periodiska svängningarna med högre frekvens, och dessa ger tonen dess karaktäristiska klangfärg. Det är övertonernas relativa styrka som gör att instrument kan skiljas från varandra. En ton på ett piano skiljer sig från samma ton på en gitarr genom att storleksförhållandena (ljudnivån) på respektive instruments övertoner är annorlunda. Musikaliskt motsvarar den första övertonen en fördubbling av frekvens och då det musikaliska intervallet oktav. Den andra övertonen är en faktor 3 i förhållande till grundfrekvensen och ger tonförhållandet 3:2, det motsvarar intervallet kvint.

Musikinstrument har genom åren förändrats och finjusterats genom att instrumentmakare strävat efter ett önskvärt ljud, eller ett ljud med nya intressanta tonkvalitéer. Denna förändring har oftast baserats på beprövad erfarenhet och tagit många år av "evolution".

Matematik

Följande avsnitt är en beskrivning av grunderna i Fourieranalys. Avsnittet är baserat på Dave Bensons publikation *Music: A Mathematical Offering*, där författaren har samlat viktiga begrepp från matematiken som är centrala för att förstå de matematiska byggstenarna i musik. Det resonemang som beskrivits i inledningen av det matematiska avsnittet kommer i nedanstående del redogöras matematiskt. Vinklar mäts i radianer och det går 2π radianer på en cykel. En våg med en viss frekvens f (mätt i Hertz), amplitud A och fas ϕ motsvarar

$$A \sin(2\pi ft + \phi).$$

Som det har beskrivits tidigare i teoriavsnittet består musikaliska toner i allmänhet inte av endast en sinusvåg, utan består utav en sammansättning av flera sinusvågor med olika amplituder. Själva vågen är periodisk, den uppvisar ett repeterande mönster, och nedbrytningen av den som en summa av sinusvågor kallas Fourieranalys.

Jean Baptiste Joseph Fourier introducerade idén om att periodiska funktioner kan uttryckas och analyseras som en summa av de enkla trigonometriska funktionerna *cosinus* och *sinus*. Båda funktionerna $\cos x$ och $\sin x$ är periodiska med perioden 2π och satisfierar följaktligen

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos(x + 2\pi), \\ \sin(x) &= \sin(x + 2\pi) .\end{aligned}$$

Detta betyder att en förflyttning av funktionen längs x -axeln med 2π inte påverkar funktionens värde, den uppför sig likadant efter perioden 2π , funktionen är 2π -periodisk. Det finns förstås fler funktioner som är periodiska och uppfyller kravet

$$f(x) = f(x + L) .$$

Funktionen $f(x)$ är då L -periodisk. Dessa periodiska funktioner kan uttryckas som en summa av cosinus- och sinustermerna. Generellt kan en funktion $f(x)$ med perioden L skrivas

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

där a_0 , a_n och b_n är konstanter. Dessa kallas för Fourierkonstanter eller Fourierkoefficienter och ges av

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx\end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Den periodiska funktionen $f(x)$ kan således uttryckas som en konstantterm och summan av sinus- och cosinustermerna. Svängningarna som sinus- och cosinustermerna ger upphov till frekvenser som är multiplar av $f(x)$ grundfrekvens. Argumenten i de trigonometriska funktionerna är $\frac{2\pi}{L}nx$ där $\frac{2\pi}{L}$ är en konstant faktor, n är ett heltal och x ses här som tidsvariabel. Konstanterna a_n och b_n står som amplituder till varje svängning och avgör på det sättet hur mycket (kvantiteten) av varje frekvens som finns representerad i den periodiska funktionen.

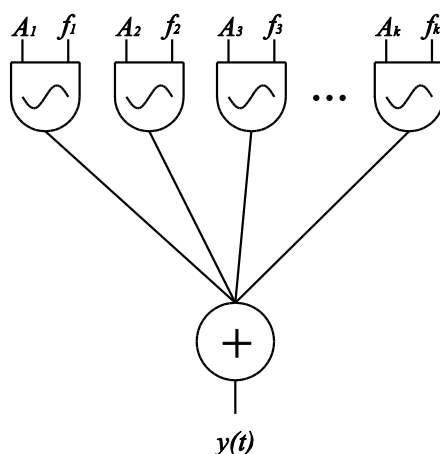
Det är av intresse att kunna beskriva periodiska svängningar då det vi uppfattar som en musikalisk ton består av periodiska svängningar med avseende på tiden. Denna tons klangfärg, det vill säga det som gör att vi känner igen en röst eller ett instrument, beror av storleken på Fourierkonstanterna som i sin tur bestämmer amplituden på övertonerna. Teori om Fourierserier ger oss matematiska verktyg att beskriva en musikalisk ton.

Syntes

En digital synthesizer använder sig av digitala signaler för att alstra eller manipulera ljud. Det skapar en otrolig variation av och mångsidighet i de ljud som kan utformas. Det kan användas för att härma redan existerande instrument eller användas för att skapa något helt nya. Syntar är ett av de utmärkande instrumenten hos elektronisk musik.

Mot bakgrund i den matematiska teori som presenterats ovan bygger syntesmetoder på att arbeta enligt en likartad men på många sätt omvänd process. Processen består av att bygga upp och skapa en ton genom att producera ljudsvängningar som förhåller sig enligt Fourierserier. Då skulle en ton, eller periodisk signal, alstras och beroende på hur man väljer storleksordningen på övertonerna kan man bestämma detta instruments klangfärg.

Additiv syntes är en sådan metod där man skapar ett syntetiskt ljud, i till exempel en dator. Den slutliga ljudsignalen bildas av en sammansättning av sinusformade svängningskomponenter. Detta grundar sig i och kan jämföras med den matematiska teorin om den svängande strängen och hur periodiska signaler kan uttryckas i Fourierserier. Enkla sinusformade funktioner genereras, adderas genom superpositionsprincipen och bygger på så sätt upp tonen. Tre komponenter behöver kontrolleras för varje sinusfunktion; amplitud, frekvens och fas. I många fall utelämnas bestämning av fasen, detta för att kunna begränsa antalet parametrar. Fasen för en ljudvåg har ingen betydelse för hur den sammanlagda ljudvågen uppfattas, det är endast frekvensen och styrkan hos de olika komponenterna som är av relevans. Ett exempel på additiv syntes kan vara att modellera övertonsserien för en ton. Det kan ske genom försök att efterlikna övertonerna som ett riktigt instrument ger upphov till.



Schematisk bild över begreppet additiv syntes. Vågor med varierande amplitud och frekvens adderas och bildar ljudsignalen.

En av de nackdelar med additiv syntes i det allmänna fallet är den enorma mängd data som är involverad i syntesframställningen. Varje ton som alstras består av i regel fler än 30 övertoner, alla med specifik amplitud och frekvens (frekvenserna behöver ej förhålla sig harmoniskt). Metoden lämpar sig dock väl vid syntes av ljud med harmoniskt spektrum, där övertonernas frekvenser är multiplar av grundfrekvensen. Detta då endast en frekvens behöver genereras, denna kan sedan multipliceras med en faktor för att generera nästa frekvenstal. Varje frekvens för övertonerna behöver inte specificeras utan alla beror av grundfrekvensen. Toner med olika grundfrekvenser kan sättas i förbindelse med en klaviatur eller liknande instrument för musikalisk kontroll.

Laboration

Detta avsnitt presenterar förslag på upplägg av laborationen. Laborationen kan delas upp i tre olika faser: Bekanta sig med utrustning, undersöka och göra eget ljud. Dessa faser kan presenteras för eleverna, eventuellt skrivas upp på tavlan som en lista. Det gör att eleverna kan se vad som väntar och var de befinner sig i laborationen.

Pedagogik och didaktik

För att inför ett klassbesök vara förbered och för klassen utföra laborationen efter bästa förmåga presenteras nedan några synpunkter och metoder som kan vara till hjälp.

För att få eleverna att inte bara göra en laboration utan att faktiskt lära sig och förstå momenten är det bra att som besöksledare formulera svaren på de tre didaktiska frågorna på laborationen. Dessa frågor är:

- Vad ska läras? – Matematikinnehåll
- Varför ska det läras? – Mål och syfte
- Hur ska eleverna få möjlighet att lära? – Metod och genomförande av aktiviteten

Genom att ställa sig dessa frågor och svara på vilket sätt man själv ska uppfylla dem skapas en struktur hos laborationen och tydliggörs vilket syfte den har. Dessa frågor och svar kan även presenteras för eleverna för att de också ska erhålla innehåll, syfte och metod med den laborativa verksamheten. Detta för att minska risken av att eleverna endast genomför laborationen, utan fokusera på lärandet och förståelsen.

Bekanta sig med utrustning

Till att börja med delas eleverna upp i grupper om 2-4 personer som placeras vid laborationsstationerna. En laborationsstation består av analyseringsutrustning och en tillhörande laptop med programvara. Utför en introduktion av ämnet som innefattar teori om ljudvågors egenskaper som svängningstid och våglängd. Även begrepp som amplitud och frekvens bör förklaras och demonstreras.

Analyseringsprogramvaran introduceras lämpligast samtidigt som teorin presenteras. Då kan de teoretiska kunskaperna varvas och kopplas med kunskap om programvaran. Det är passande att använda en stämgaflö som första analysobjekt. Stämgaflö avger en konstant frekvens utan övertoner och ger en klar bild över hur analyseringsprogrammet fungerar.

- *Låt eleverna bestämma/verifiera frekvensen hos stämgaflöarna, genom oscilloskop samt via frekvensspektrum.*
- *Vad är skillnaden mellan oscilloskopet och frekvensspektrumet?*

Använd clickers och det frågeformulär som finns för laborationen. Detta för att involvera eleverna i lärandet och samtidigt kunna stämma av vilken förståelse eleverna har för ämnet. Fråga 1 – 3 berör detta område. Svaren från eleverna ger besöksledaren en tidig uppfattning om hur kunskapsnivån i laborationsgruppen ser ut.

Undersöka

När eleverna har bekantat sig med analyseringsprogramvaran är det dags för det undersökande arbetet. Eleverna kan genom mikrofonen spela in sin röst och analysera den när de sjunger olika vokaler. I programmet kan man stoppa inspelningen och graferna fryser vid den aktuella bilden. Detta gör att man i efterhand kan analysera det inspelade ljudet.

- *Vad skiljer ljudet från stämgaflöet ljudet från en mänsklig röst?*
- *Låt eleverna från oscilloskopet avgöra grundfrekvensen i ljudet, stämmer det överens med vad FFT-grafen visar?*
- *Sjung vokaler A och O med samma frekvens (samma ton). Vad är den största skillnaden mellan de två vokaler i frekvensspektrumet?*
- *Låt eleverna undersöka sambandet i frekvens mellan grundton och övertonerna.*

Efter att eleverna har analyserat sin egen röst när de sjunger vokaler, får de tillgång till elgitarerna. Genom att spela på en sträng i taget kan gitarrens grundfrekvens bestämmas.

- *Försök att sjunga samma ton som gitarren och analysera skillnader och likheter i ljudet och dess grafiska representation.*
- *Vad händer med övertonerna om man dämpar gitarsträngen vid halva dess längd?*
- *Vad händer med övertonerna om man dämpar gitarsträngen vid en tredjedel respektive en fjärdedel av dess längd?*
- *På ett piano väljer tillverkaren att sätta anslagshammaren på 1/7 av strängens längd. Varför väljer tillverkaren att göra detta?*

Sammanfatta vad eleverna kommit fram till och betona övertonernas betydelse i ljudkaraktären hos en ton. En huvudpoäng är att lyfta fram att det är övertonernas relativa styrka gentemot varandra som utmärker ett visst ljud. Det fungerar som ett fingeravtryck som våra öron kan identifiera och särskilja.

Beskriv gärna likheten mellan den komplicerade process som datorn utför (FFT) och våra öron som ständigt analyserar och karaktäriserar ljud.

Sammanfatta den samlade lärdomen om gitarrsträngen. Att man kan släcka ut vissa övertoner genom att placera ett finger vid en nodpunkt.

Fortsätt med att använda clickers, fråga 4 – 6 berör detta område.

Göra eget ljud

Då eleverna nu har kunskap om att en ton består av grundfrekvens och övertoner som är multiplar av grundfrekvensen får de nu själva syntesera ett eget ljud. Genom GeoGebra kan de ställa ljudnivån hos upp till 11 övertoner samtidigt som de kan lyssna på ljudsignalen, grafiskt se sinusvågorna och grafiskt se summationen av dem.

- *Be eleverna att lyssna på varje överton, en i taget.*
- *Låt eleverna lyssna när övertoner adderas till varandra och bildar en ton.*
- *Är den sammanlagda ljudsignalen periodisk? Med vilken frekvens?*
- *Låt eleverna efterlikna ett riktigt instrument (gitarr, klarinet och fiol).*
- *Låter det synteserade ljudet som ett riktigt instrument?*
- *Beskriv vad som händer med den sammanlagda ljudsignalen om amplituden sätts till $1/k$ där k är index på övertonen. Hur låter ljudet?*
- *Låt eleverna själva skapa ett eget ljud som de tycker låter bra.*
- *Analysera det synteserade ljudet?*
- *Vilka parametrar kan tänkas påverka hur en ton uppfattas?*

För de elever som är intresserade kan här en djupare teorienomgång om grunderna i Fourieranalys ges. Att varje periodisk funktion kan uttryckas som summan av enklare sinus eller cosinus termer. Ta upp användningen av Fourieranalys inom andra områden.

När laborationen är slut är det viktigt att få ett bra avslut, sammanfatta hela laborationen från början till slut med betoning på viktiga områden kopplade till syftet.

Avsluta med att använda clickers, fråga 7 – 8 berör detta område.

Dela slutligen ut det skriftliga frågeformulär, där eleverna ska skriva vad de tycker om hela laborationens upplägg.

Instruktioner till programvara

Beskrivningar av de tre programvarorna, med steg-för-steg-instruktioner, presenteras i följande avsnitt. Besöksledaren bör vara påläst på detta avsnitt då problem med utrustningen är tidskrävande och påverkar intrycket av laborationen negativt. Ett tips kan vara att förutom en laborationsutrustning till varje elevgrupp vara förberedd en färdigställd uppställning att använda i det fall något skulle vara ur funktion.

PASCO med programvaran DataStudio

Dator (med strömkabel), mus, PASCO, USB-slabb, Pasco-ljudsensor, PASCO-kabel (kopplas mellan ljudsensor och PASCO-enhet).

Koppla utrustningen, slå på PASCO och starta datorn.



Bild på laborationsutrustningen

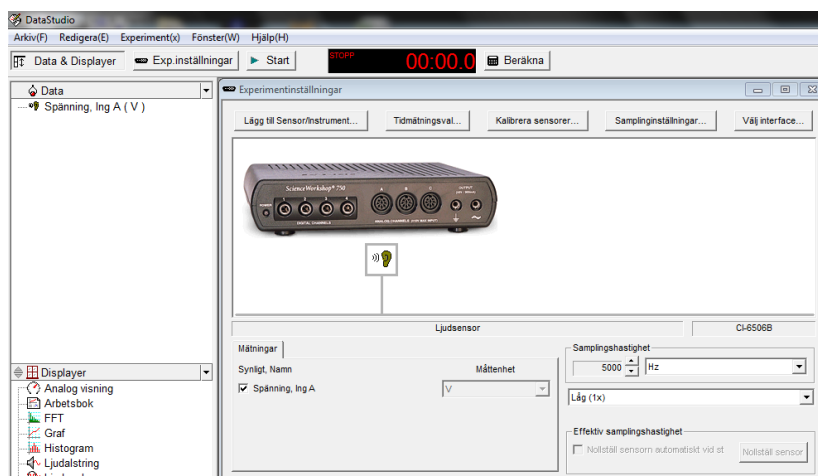
Logga in på användare VH med lösenord:

Starta DataStudio, finns ikon på skrivbordet i datorn.



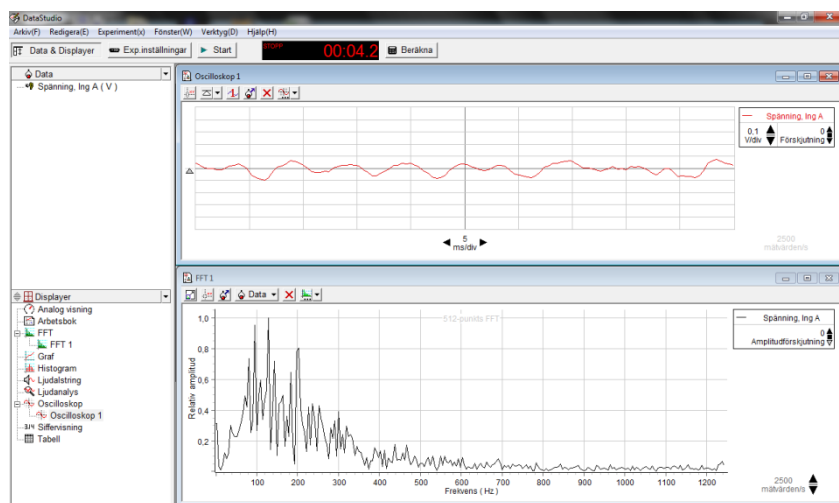
Klicka på "Skapa ett experiment".

Dubbelklicka på den ingång du valt för ljudsensor (ingång A enligt kopplingsschemat) och välj "Ljudsensor" (se bild nedan), inte "Ljudsensor (dynamisk)" då vi ej har en dynamisk mikrofon.



Figur som visar DataStudio

Dubbeltklicka först på "Oscilloskop" i listan över displayer och sedan "FFT". Detta ger en graf över vågformen samt en graf över frekvensspektrum. Anpassa de båda fönstren så att de fyller skärmen (se bild nedan).

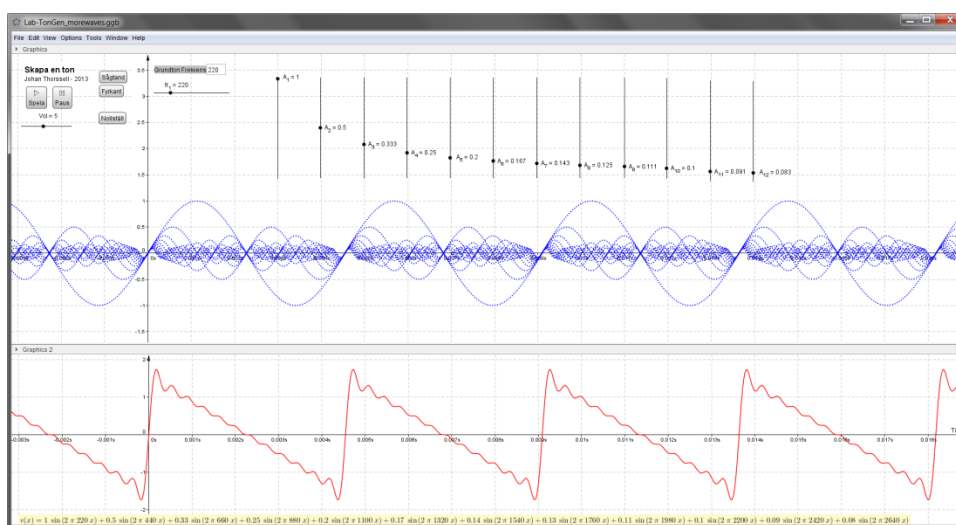


Figur som visar DataStudio

För att få bra värden och tydlig representation i graferna krävs några slutgiltiga inställningar. De finjusteringar som behövs är dels att Oscilloskopets signal synliggörs genom ändring av reglaget V/div, dels att andelen mätvärden/s i FFT-diagrammet ändras till 5000, dels att frekvensaxeln ändras så den visar frekvenser över 1500 Hz.

GeoGebra

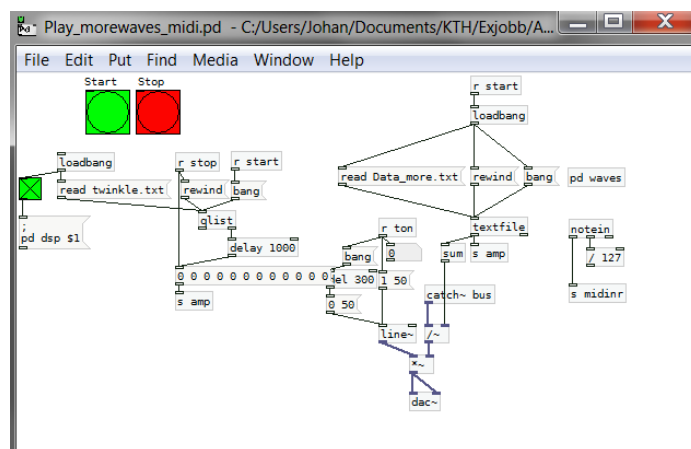
För ljudsyntesen används programmet GeoGebra. Dubbeltklicka på filen för att starta programmet. I programmet finns tre betydelsefulla fönster; ett inmatningsfönster och två grafiska fönster. I inmatningsfönstret bestäms frekvens och amplitud hos grundton samt upp till 11 övertoner. Genom att dra i reglagen sätts ett värde för amplituden hos varje överton. I det första grafiska fönstret visas graferna för alla olika deltoner (sinusvågor). I det andra grafiska fönstret visas grafen för en våg som är summa av alla sinusvågor (ljudvågen). Denna ljudvåg kan sedan spelas upp genom att trycka på "spela"-knappen i programmet. När amplituderna manipuleras ändras ljudet i realtid.



Figur som visar programmet i GeoGebra.

Pure Data

För att slutligen höra det synteserade ljudet i en melodi används programmet Pure Data. Det fungerar som en vanlig musikspelare och består av en "Start"-knapp (grön) och en "Stop"-knapp (röd). Om "Start"-knappen trycks in spelas melodin *Blinka lilla stjärna* med det ljud som specificerats i GeoGebra.



Figur som visar uppspelningsprogrammet i Pure Data

Referenser

Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006

Fördjupande material

Om du är intresserad av detta ämne, vill fördjupa dina kunskaper eller inspireras rekommenderas följande litteratur och länkar:

Benson, Dave (2006). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press 2006 finns att hämta som pdf-fil på följande länk: <http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/maths-music.html>

Wikipedia – Music and mathematics: http://en.wikipedia.org/wiki/Music_and_mathematics

Wikipedia – Fourier series: http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

Wikipedia – Synthesizer: <http://en.wikipedia.org/wiki/Synthesizer>

Wolfram – Fourier series: <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

Youtube – Sixty Symbols Fourier Analysis: <http://www.youtube.com/watch?v=u1Lz8pm2npQ>

Geogebra: <http://www.geogebra.org/cms/en/>

Javaapplikationer som simulerar fysik: <http://falstad.com/mathphysics.html>

Bilaga till besöksledarhandledning - Clickersfrågor:

Här presenteras en sammanställning av de clickersfrågor som det hänvisas till i besöksledarhandledningen. Rätt svar markeras med **grönt**.

Fråga 1 - Vad visar oscilloskopet?

1. Luftens vibrationer med avseende på tiden
2. En summa av sinustermer
3. Medelvärde av alla frekvenser
4. Andelen av en viss frekvens

Fråga 2 - Vad visar frekvensspektrumet?

5. Luftens vibrationer med avseende på tiden
6. En summa av sinustermer
7. Medelvärde av alla frekvenser
8. Andelen av en viss frekvens

Fråga 3 - Vad menas med det matematiska uttrycket amplitud när vi pratar om ljud?

1. Frekvens
2. Ljudstyrka
3. Period
4. Summa

Fråga 4 - Vad är det för skillnad mellan stämgaflens och gitarsträngens frekvensspektrum?

1. Stämgaflen har många övertoner
2. Gitarren har fler övertoner i jämförelse med stämgaflen
3. Gitarren har bara en grundton
4. Stämgaflen har fler övertoner i jämförelse med gitarsträngen

Fråga 5 - På vilket sätt förhåller sig övertonerna i en ton mot varandra?

1. Det finns inget förhållande
2. Övertonernas frekvenser förhåller sig som en multipel av grundtonens frekvens
3. Övertonernas amplitud förhåller sig som en multipel av grundtonens amplitud
4. Övertonerna förhåller sig som $1/k$, där k är ett heltal

Fråga 6 - Vilken överton är det man hör om man dämpar gitarsträngen vid halva dess längd?

1. Ingen överton hörs
2. Bara grundtonen
3. Den första övertonen
4. Den andra övertonen

Fråga 7 - Vad kallas teorin om att periodiska funktioner kan delas upp i "enklare" svängningar?

1. Differentialekvation
2. Integralkalkyl
3. Trigonometri
4. Fourieranalys (Fourierserier)

Fråga 8 - Vad visar den andra grafen (den röda)?

1. En summa av sinustermer
2. Andelen frekvenser i ljudvågen
3. Skillnaden mellan grundtonen och övertonerna
4. En produkt av sinustermer

7.4. Utvärdering av laboration

Utvärdering, första testklass

Elevsvar	12 st elever
<i>Kände du till VH innan?</i>	
Ja	12 st
Nej	
Annat?	
<i>Skulle du vilja fortsätta prata om innehållet i dagens laboration när du kommer tillbaka till skolan?</i>	
Ja	3 st
Nej	
Kanske/vet ej	9 st
<i>Jag tyckte att laborationen var...</i>	
För lätt	
Lagom	11 st
För svår	1 st
<i>Jag tyckte att laborationen var...</i>	
Rolig och intressant	6 st
Tråkig och ointressant	
Jag har ingen speciell åsikt	5 st
Annat?	Intressant men det blev stökigt
<i>Vill du komma tillbaka till Vetenskapens Hus och göra andra matematiklaborationer?</i>	
Ja	2 st
Nej	1 st
Kanske	9 st
Övrigt	Det var en aning svårt att hänga med

Lärarsvar

Kommer du att använda något av innehållet i dagens laboration i klassrummet?

Ja

Om ja i föregående fråga, beskriv gärna hur?
Återkoppla angående instruments klangfärg m.m.

Vad tyckte du var bra med laborationen?
Att de fick varvat med teori, Johan pratar bra och är medryckande och pedagogisk

Var det något du saknade eller något som kändes otydligt/för svårt?
(Nej) testa några fler instrument, kanske koppla liknande data program och visa på skärm

Övriga kommentarer, tankar och synpunkter?
Laborationen ger bra insikt om vad ljud är och känslan att veta mer
Ännu bättre om de är bara 2 i varje grupp, oftast en tredje person inaktiv

Ljusare belysning vid tavlan

Utvärdering, andra testklass

Elevsvar

15 st elever

Kände du till VH innan?

Ja 15 st

Nej

Annat?

Skulle du vilja fortsätta prata om innehållet i dagens laboration när du kommer tillbaka till skolan?

Ja 4 st

Nej 1

Kanske/vet ej 10 st

Jag tyckte att laborationen var...

För lätt

Lagom 15 st

För svår

Jag tyckte att laborationen var...

Rolig och intressant 9 st

Tråkig och ointressant

Jag har ingen speciell åsikt 5 st

Annat?

Lite långtråkig på slutet med det beror mer på

ämnet än ni som höll i det och upplägget

Bra lärare, lätt att förstå, det var roligt att vi fick

testa på många olika utrustningar, som både

stämgaffel, elgitarr, och dataprogrammet. Ro-

ligt att ledarna var engagerade

Vill du komma tillbaka till Vetenskapens Hus och göra andra matematiklaborationer?

Ja 11 st

Nej

Kanske 4 st

Övrigt

Lärarsvar

Kommer du att använda något av innehållet i dagens laboration i klassrummet?

Ja

Om ja i föregående fråga, beskriv gärna hur?

Återkoppla angående instruments klangfärg m.m.

Vad tyckte du var bra med laborationen?

Lagom svår, bra med dialogen med eleverna

Var det något du saknade eller något som kändes otydligt/för svårt?

Kanske en avslutande tävling (gruppvis) (hörlurar?) (fler datorer) Man behöver bara 4 gitarer men kanske kan ha fler datorer när man gör ljud

Övriga kommentarer, tankar och synpunkter?

-